

2024 ~ 2025 学年第一学期高一期中调研试卷

数 学

2024.11

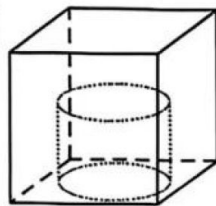
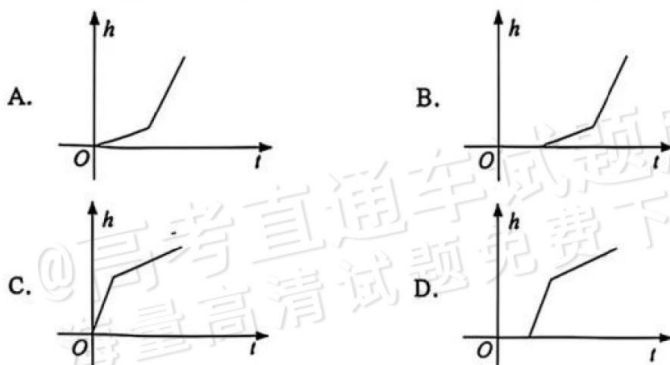
注意事项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及每题答题要求:

1. 本卷共4页,包含单项选择题(第1题~第8题)、多项选择题(第9题~第11题)、填空题(第12题~第14题)、解答题(第15题~第19题).本卷满分150分,答题时间为120分钟.答题结束后,请将答题卡交回.
2. 答题前,请您务必将自己的姓名、调研序列号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答,在其他位置作答一律无效.作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整,笔迹清楚.
4. 请保持答题卡卡面清洁,不要折叠、破损.一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 4\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(1, 2)$ B. $(2, 4)$ C. $(1, 4)$ D. $(1, +\infty)$
2. 已知函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为 A , 则“ $x \in (0, +\infty)$ ”是“ $x \in A$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m \geq 0$, 若 p 为真命题, 则实数 m 的取值范围为
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
4. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则函数 $y = 2f(x) - x$ 的值域是
A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 0]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
5. 如图所示, 正方体容器内放了一个圆柱形烧杯, 向放在容器底部的烧杯注水(流量一定), 注满烧杯后, 继续注水, 直至注满正方体容器, 则正方体容器中水面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数图象可能是



6. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^3 + bx + c$, 若 x_0 是关于 x 的方程 $2ax + b = 0$ 的实数根, 则下列命题中为假命题的是

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$

7. 一般认为, 民用住宅的窗户面积必须小于地板面积, 但窗户面积与地板面积的比应不小于 10%, 而且这个比值越大, 采光效果越好, 则

- A. 若一所公寓窗户面积与地板面积的总和为 220m^2 , 则这所公寓的窗户面积至少应该为 22m^2
B. 若窗户面积和地板面积在原来基础上都增加了 10%, 公寓采光效果会变好
C. 若同时增加相同的窗户面积和地板面积, 公寓的采光效果会变好
D. 若同时增加窗户面积和地板面积, 且增加的地板面积是增加的窗户面积的 8 倍, 公寓采光效果一定会变差

8. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有不等式

$$\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \text{ 且 } f(-2) = -1, \text{ 则不等式 } f(x-1) > \frac{2}{x-1} \text{ 的解集是}$$

- A. $(-1, 3)$ B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$ D. $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{-1, 3\}$, 则

- A. 集合 A 的真子集个数是 7 B. $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$
C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U C) = \emptyset$ D. $B \subseteq \complement_U C$

10. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 若 $a + b = 1$, 则

- A. ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 10
C. $a^2 - 2b^2$ 的最大值为 2 D. $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 8

11. 设函数 $f(x) = (x-2)|x|$, 则

- A. 直线 $x=1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴
B. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 则 $0 < m \leq 1$
C. 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不等式 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 总成立
D. 当 $-1 < x < 2$ 时, $f(2-x) \geq f(x)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $P = \{1, a\}$, $Q = \{-1, -b\}$, 若 $P = Q$, 则 $a - b =$ ▲.

13. 已知 $y = f(x) + x$ 是偶函数且 $f(1) = 0$, 若 $g(x) = f(x) + 1$, 则 $g(-1) =$ ▲.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |x-a|+2, & x \leq 2, \\ x^2-ax+2a, & x > 2, \end{cases}$ 若 $f(2)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值, 则实数 a 的取值范围是 ▲.



四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)已知全集为 $\mathbf{R}$,集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid a < x < a+5\}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1)若 $a=1$,求集合 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$;

(2)若 $A \cap B = A$,求 a 的取值范围.

16. (本小题满分15分)已知函数 $f(x) = x^2 - ax + c$,其中 $a, c \in \mathbf{R}$.

(1)若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 3\}$,解关于 x 的不等式 $\frac{cx-1}{ax+1} < 1$;

(2)解关于 x 的不等式 $f(x) < 1 - a + c$.

17. (本小题满分15分)函数 $f(x) = \frac{a-x^2}{1+bx^2}$ 是定义在 $(b-10, 2b+7)$ 上的偶函数,且 $f(0) = 1$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式及其值域;

(3)求 $f(m) + f(\frac{1}{m})$ 的值,并计算 $f(-8) + f(-7) + \cdots + f(-2) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \cdots + f(\frac{1}{8})$.



18. (本小题满分 17 分) 某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池, 其容积为 4800 立方米, 深为 3 米. 甲工程队参与投标, 给出的报价为: 池底每平米的造价为 150 元, 池壁每平米造价为 120 元. 设总造价为 S 元, 池底一边长为 x 米, 另一边长为 y 米.

(1) 若按照甲工程队的报价, 怎样设计能使水池造价最低? 最低造价是多少?

(2) 现有乙工程队也参与投标, 其给出的整体报价为 $a(x^2 + y^2) + 283200$ 元, 其中 $5 \leq a \leq 6$, 试问甲工程队一定能中标吗? (报价总低于对手即为中标)

▲ ▲ ▲

19. (本小题满分 17 分) 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(2) 记 $g(x) = |f(x) - 5|$.

(i) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由. 再请直接写出 $g(x)$ 的单调区间;

(ii) 是否存在这样的区间 $[a, b]$ ($a > 0$), 使得 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数, 且 $g(x)$ 的

取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$. 若存在, 求出区间 $[a, b]$; 若不存在, 请说明理由.

▲ ▲ ▲



苏州市 2024~2025 学年第一学期期中调研试卷

高一数学

2024.11.5

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid 1 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x > 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. (1,2) B. (2,4) C. (1,4) D. (1, +∞)

【答案】B

2. 已知函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为 A , 则“ $x \in (0, +\infty)$ ”是“ $x \in A$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】因为 $A = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$, 所以“ $x \in (0, +\infty)$ ”是“ $x \in A$ ”的充分不必要条件
故选 A

3. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + m \geq 0$, 若 p 为真命题, 则实数 m 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

【答案】D

【解析】若 p 为真命题, 则 $\Delta = 4 - 4m \leq 0 \Rightarrow m \geq 1$
故选 D

4. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则函数 $y = 2f(x) - x$ 的值域是 ()
A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 0]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

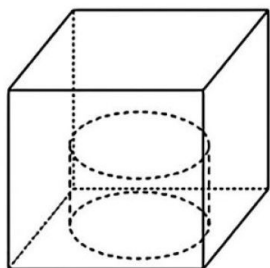
【答案】A



高考直通车
App生成

【解析】因为 $f(x)$ 为幂函数, 设 $f(x) = x^a$, 代入点 $(2, \sqrt{2})$, $f(2) = 2^a = \sqrt{2}$ 解得 $a = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = \sqrt{x}$
 则函数 $y = 2f(x) - x = 2\sqrt{x} - x = -(\sqrt{x} - 1)^2 + 1$, 因为 $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, 所以当 $\sqrt{x} = 1$ 时, $y_{\max} = 1$,
 当 $x > 1$ 时, 函数单调递减, 趋向 $-\infty$, 所以函数 $y = 2f(x) - x$ 的值域是 $(-\infty, 1]$
 故选 A

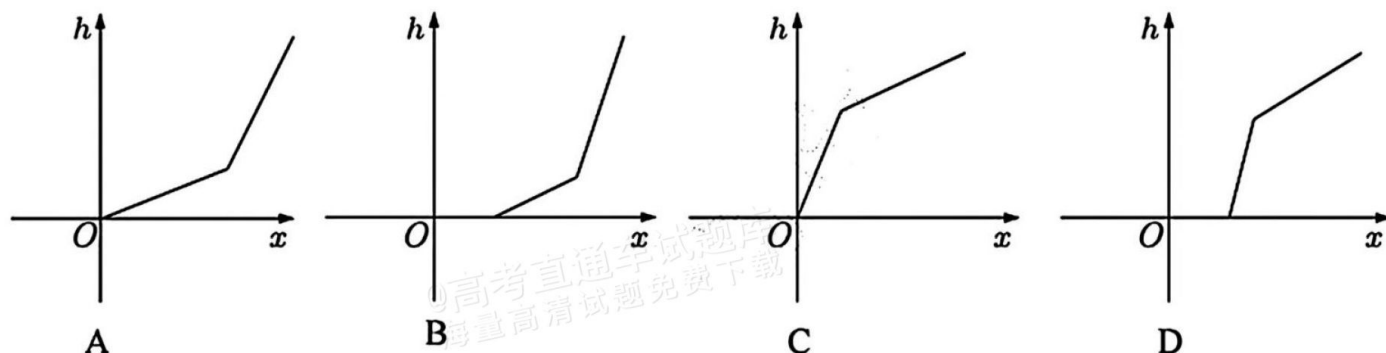
5. 如图所示, 正方体容器内放了一个圆柱形烧杯, 向放在容器底部的烧杯注水 (流量一定), 注满烧杯后, 继续注水, 直至注满正方体容器, 则正方体容器中水面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数图象可能是 ()



④ 高考直通车试题库
 海量高清试题免费下载



高考直通车
 App生成



【答案】D

【解析】在烧杯中水未满之前,正方体内水的高度为0,故排除AC,当水面未浸没烧杯之前,水面上升速度必然大于浸没烧杯后水面上升速度,故排除B,选D

6. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 若 x_0 是关于 x 的方程 $2ax + b = 0$ 的实数根, 则下列命题中为假命题的是 ()

A. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x_0)$

B. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$

C. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x_0)$

D. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$

【答案】C

【解析】解析由题意 x_0 是关于 x 的方程 $2ax + b = 0$ 的实数根, 则 $x_0 = -\frac{b}{2a}$,

因为 $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$,

所以 x_0 为 $f(x)$ 的顶点横坐标, 因为 $a > 0$, 二次函数开口向上, 所以 $(x_0, f(x_0))$ 是 $f(x)$ 的最小值点,

故选项 C 错误

故选 C



高考直通车
App生成

7. 一般认为,民用住宅的窗户面积必须小于地板面积,但窗户面积与地板面积的比应不小于10%,而且这个比值越大,采光效果越好,则 ()

- A. 若一所公寓窗户面积与地板面积的总和为 220 m^2 ,则这所公寓的窗户面积至少应该为 22 m^2
- B. 若窗户面积和地板面积在原来基础上都增加了10%,公寓采光效果会变好
- C. 若同时增加相同的窗户面积和地板面积,公寓的采光效果会变好
- D. 若同时增加窗户面积和地板面积,且增加的地板面积是增加的窗户面积的8倍,公寓采光效果一定会变差

【答案】C

【解析】

解析设窗户面积为 x ,地板面积为 y ,由题意 x, y 满足 $\begin{cases} x < y \\ x \geq 10\%y \end{cases}$ 即 $x < y \leq 10x$

对于A,即 $x + y = 220$,所以 $220 = x + y \leq x + 10x \Rightarrow 11x \geq 220 \Rightarrow x \geq 20$,所以这所公寓的窗户面积至少应该为 20 m^2 ,A错误;

对于B,若窗户面积和地板面积在原来基础上都增加了10%,则窗户面积与地板面积的比不变,所以采光效果不变,B错误;

对于C,因为 $0 < x < y$,若同时增加相同的窗户面积和地板面积,设为 nm^2 ,由糖水不等式知 $\frac{x}{y} <$

$\frac{x+m}{y+m}$,窗户面积与地板面积比增大,采光效果变好,C正确;

对于D,即窗户面积增加 $n \text{ m}^2$,地板面积增加 $8n \text{ m}^2$,例如 $y = 9x, \frac{x}{y} = \frac{1}{9}$



高考直通车
App生成

$\frac{x+n}{y+8n} = \frac{x+n}{9x+8n} > \frac{x+n}{9(x+n)} = \frac{1}{9} = \frac{x}{y}$, 即 $\frac{x+n}{y+8n} > \frac{x}{y}$, 所以窗户采光不一定会变差, D 错误

故选 C

8. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有不等式 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,

且 $f(-2) = -1$, 则不等式 $f(x-1) > \frac{2}{x-1}$ 的解集是 ()

A. $(-1, 3)$

B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (1, 3)$

D. $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

【答案】D

【解析】解析因为 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 可设 $x_1 > x_2 \in (0, +\infty)$,

则不等式 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 等价于 $x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) > 0$, 即 $x_1 f(x_1) > x_2 f(x_2)$,

构造函数 $g(x) = xf(x)$, 即 $g(x_1) > g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 又因为 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上奇函数, 所以 $g(x) = xf(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上偶函数, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 而 $g(-2) = (-2) \cdot f(-2) = 2 = g(2)$, 所以所求不等式 $f(x-1) > \frac{2}{x-1}$

当 $x-1 > 0$ 时, 即 $x > 1$ 时, $(x-1)f(x-1) > 2$, 即 $g(x-1) > g(2)$, 则 $x-1 > 2$ 或 $x-1 < -2$

解得 $x > 3$ 或 $x < -1$, 因为 $x > 1$, 所以不等式解集为 $(3, +\infty)$

当 $x-1 < 0$ 时, 即 $x < 1$ 时, $(x-1)f(x-1) < 2$, 即 $g(x-1) < g(2)$,

则 $\begin{cases} -2 < x-1 < 2 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1, \text{ 或 } 1 < x < 3$, 因为 $x < 1$, 所以不等式解集为 $(-1, 1)$

综上不等式 $f(x-1) > \frac{2}{x-1}$ 的解集是 $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$

故选 D



高考直通车
App生成

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 设全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{2, 4\}$ ， $C = \{-1, 3\}$ ，则 ()

A. 集合 A 的真子集个数是7

B. $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$

C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U C) = \emptyset$

D. $B \subseteq \complement_U C$

【答案】ABD

10. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，若 $a + b = 1$ ，则 ()

A. ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为10

C. $a^2 - 2b^2$ 的最大值为2

D. $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为8

【答案】AD

【解析】对于A，由 $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}$ ，当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等，A 正确

对于B， $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$ ，

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 即 $b = 2a = \frac{2}{3}$ 时取等，所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为9，B 错误

对于C， $a^2 - 2b^2 = (1-b)^2 - 2b^2 = -b^2 - 2b + 1 = -(b+1)^2 + 2$ ，令 $g(b) = -(b+1)^2 + 2$ ，

因为 $b \in (0, 1)$ ，所以 $g(b) \in (-2, 1)$ ，所以 C 错误



高考直通车
App生成

$\frac{b}{a} + \frac{4}{b} = \frac{b}{a} + \frac{4(a+b)}{b} = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}} + 4 = 8$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ 即 $b = 2a = \frac{2}{3}$ 时取等, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 8, D 正确

故选 AD

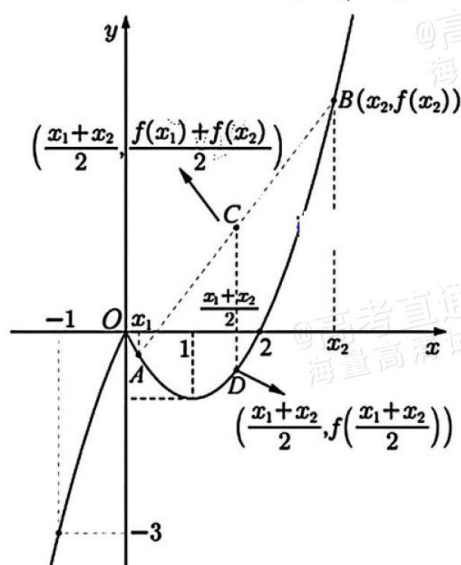
11. 设函数 $f(x) = (x-2)|x|$, 则

()

- A. 直线 $x=1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴
- B. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 则 $0 < m \leq 1$
- C. 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 总成立
- D. 当 $-1 < x < 2$ 时, $f(2-x) \geq f(x)$

【答案】BCD

【解析】 $f(x) = (x-2)|x| = \begin{cases} x(x-2), & x \geq 0 \\ -x(x-2), & x < 0 \end{cases}$, 作出 $f(x)$ 的图像如下图, 显然 A 错误, B 正确



高考直通车
App生成

对于C, 在 $x \in (0, +\infty)$ 部分的图像上任取两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为下凹函数, 所以线段AB必在 $f(x)$ 图像上方, 即AB中点在函数图像上方, 即 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

C 正确,

对于D, 因为 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上关于 $x=1$ 对称, 所以当 $x \in (0, 2)$ 时 $f(2-x) = f(x)$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $2-x \in (2, 3)$, 则 $f(2-x) > 0, f(x) < 0$, 所以 $f(2-x) > f(x)$ 成立

故当 $-1 < x < 2$ 时, $f(2-x) \geq f(x)$ 成立, D 正确

故选 BCD

三、填空题: 本题共3小题, 每小题5分, 共15分.

12. 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 集合 $P = \{1, a\}, Q = \{-1, -b\}$ 若 $P = Q$. 则 $a - b =$ _____

【答案】0

【解析】因为 $P = Q$, 所以 $\begin{cases} a = -1 \\ -b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = -1$, 所以 $a - b = 0$

13. 已知 $y = f(x) + x$ 是偶函数且 $f(1) = 0$, 若 $g(x) = f(x) + 1$, 则 $g(-1) =$ _____



高考直通车
App生成

【答案】3

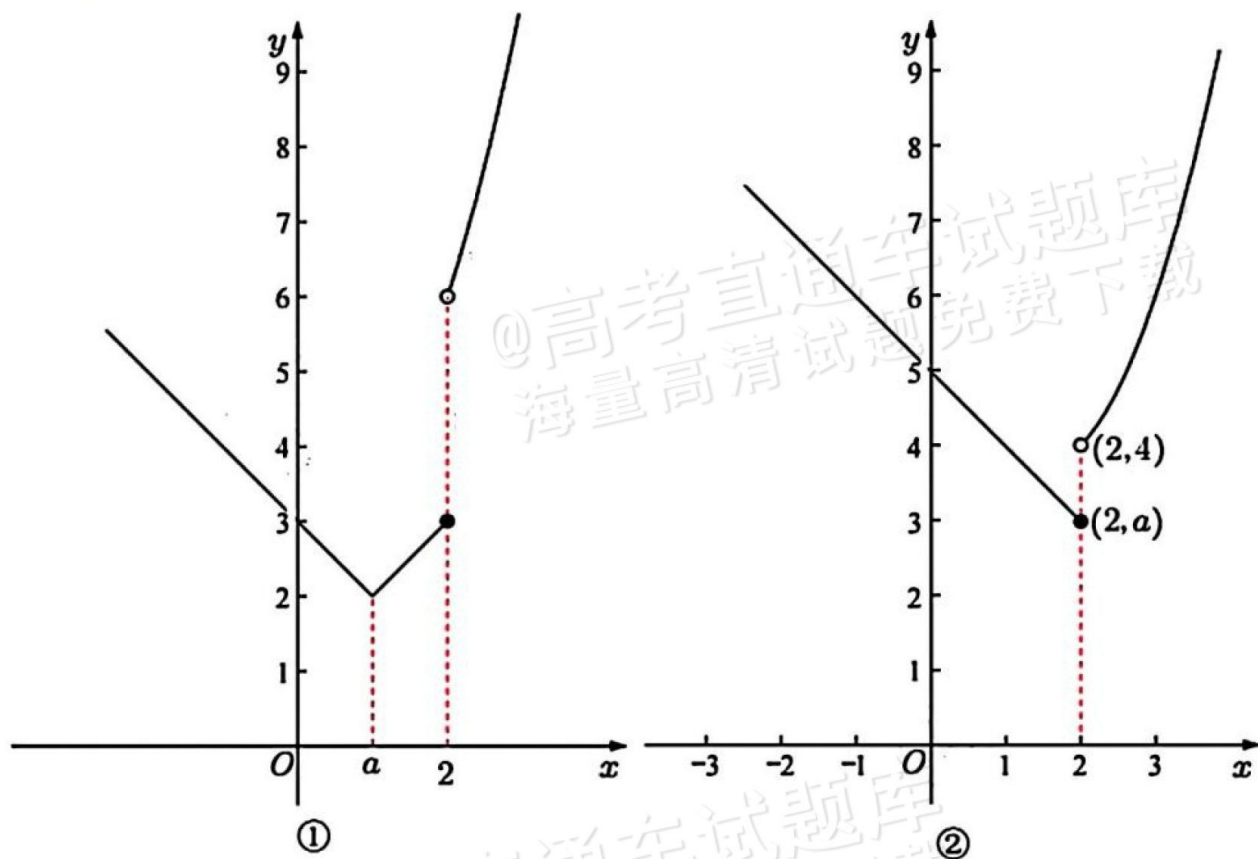
【解析】因为 $y=f(x)+x$ 为偶函数, 所以 $f(1)+1=f(-1)+(-1) \Rightarrow f(-1)=2$

所以 $g(-1)=f(-1)+1=3$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} |x-a|+2, & x \leq 2, \\ x^2-ax+2a, & x > 2, \end{cases}$ 若 $f(2)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $[2, 4]$

【解析】当 $a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 在 $(a, 2)$ 上单调递增, 则 $f(2)$ 不是最小值, 如下图①, 不合题意, 舍去



当 $a \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 若 $f(2)$ 为 $f(x)$ 的最小值, 只需 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

且端点值依次上升, 即 $\begin{cases} -\frac{-a}{2} \leq 2 \\ |2-a|+2 \leq 2^2-2a+2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 4 \\ a \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a \leq 4$, 即 $2 \leq a \leq 4$.

综上, a 的取值范围为 $[2, 4]$



⑨高考直通车
海量高清试题免费下载

⑨高考直通车
海量高清试题免费下载

⑨高考直通车
海量高清试题免费下载

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分13分)

已知全集为 R ，集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ， $B = \{x \mid a < x < a + 5\}$ ($a \in R$)。

(1) 若 $a = 1$ ，求集合 $A \cap (\complement_R B)$ ；

(2) 若 $A \cap B = A$ ，求 a 的取值范围。

【解析】(1) 若 $a = 1$ ，则 $B = \{x \mid 1 < x < 6\}$ ，所以 $\complement_R B = \{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 6\}$ ，

所以 $A \cap (\complement_R B) = \{x \mid -1 < x \leq 1\}$

(2) 若 $A \cap B = A$ ，则 $A \subseteq B$ ，所以 $\begin{cases} 3 \leq a + 5 \\ -1 \geq a \end{cases}$ 解得 $-2 \leq a \leq -1$

所以 a 的取值范围为 $[-2, -1]$

16. (本小题满分15分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + c$ ，其中 $a, c \in R$ 。



高考直通车
App生成

(1) 若不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$, 解关于 x 的不等式 $\frac{cx-1}{ax+1} < 1$;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 1 - a + c$.

【解析】 由不等式 $f(x) < 0$ 即 $x^2 - ax + c < 0$, 解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$

则 $x=1, x=3$ 是方程 $x^2 - ax + c = 0$ 两根, 所以 $\begin{cases} 1+3=a \\ 1 \times 3=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c=3 \end{cases}$, 所以不等式 $\frac{cx-1}{ax+1} < 1$

即 $\frac{3x-1}{4x+1} < 1$, 移项通分得 $\frac{x+2}{4x+1} > 0$, 即 $(x+2)(4x+1) > 0$, 解得 $x < -2$, 或 $x > -\frac{1}{4}$,

所以不等式 $\frac{cx-1}{ax+1} < 1$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > -\frac{1}{4}\}$.

(1) 不等式 $f(x) < 1 - a + c$, 即 $x^2 - ax + c < 1 - a + c$, 整理得 $x^2 - ax + a - 1 < 0$,

即 $(x-1)[x-(a-1)] < 0$

当 $a-1=1$ 时, 即 $a=2$ 时, 不等式 $(x-1)^2 < 0$ 无解, 解集为 $\emptyset$

当 $a-1 > 1$ 时, 即 $a > 2$ 时, 不等式 $(x-1)[x-(a-1)] < 0$ 解集为 $\{x | 1 < x < a-1\}$

当 $a-1 < 1$ 时, 即 $a < 2$ 时, 不等式 $(x-1)[x-(a-1)] < 0$ 解集为 $\{x | a-1 < x < 1\}$

综上: 当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$

当 $a > 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x | 1 < x < a-1\}$

当 $a < 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x | a-1 < x < 1\}$

17. (本小题满分 15 分)

函数 $f(x) = \frac{a-x^2}{1+bx^2}$ 是定义在 $(b-10, 2b+7)$ 上的偶函数, 且 $f(0) = 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及其值域;

(2) 求 $f(m) + f\left(\frac{1}{m}\right)$ 的值, 并计算 $f(-8) + f(-7) + \cdots + f(-2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{8}\right)$.



高考直通车
App生成

【解析】(1) 由偶函数得定义知: $b - 10 + 2b + 7 = 0$, 解得 $b = 1$, 即 $f(x) = \frac{a-x^2}{1+x^2}$,

又因为 $f(0) = a = 1$, 得 $a = 1$,

所以 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 定义域 $x \in (-9, 9)$, 因为 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{-(x^2+1)+2}{x^2+1} = -1 + \frac{2}{x^2+1}$

$x \in (-9, 9)$, 所以 $x^2+1 \in [1, 82)$, 所以 $\frac{2}{x^2+1} \in (\frac{1}{41}, 2]$, $-1 + \frac{2}{x^2+1} \in (-\frac{40}{41}, 1]$

即 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 定义域 $x \in (-9, 9)$, 值域为 $(-\frac{40}{41}, 1]$

$$(2) f(m) + f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1-m^2}{1+m^2} + \frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{m}\right)^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2} + \frac{m^2-1}{m^2+1} = 0$$

因为 $f(x)$ 为定义在 $(-9, 9)$ 上的偶函数, 所以 $f(-8) + f(-7) + \cdots + f(-2) = f(8) + f(7) + \cdots + f(2)$

所以 $f(-8) + f(-7) + \cdots + f(-2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{8}\right)$

$= f(8) + f(7) + \cdots + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{8}\right)$

$= [f(8) + f\left(\frac{1}{8}\right)] + [f(7) + f\left(\frac{1}{7}\right)] + \cdots + [f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)]$

$= 0$

18. (本小题满分 17 分)

某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池, 其容积为 4800 立方米, 深为 3 米. 甲工程队参与投标, 给出的报价为: 池底每平米的造价为 150 元, 池壁每平米造价为 120 元. 设总造价为 S 元, 池底一边长为 x 米, 另一边长为 y 米.

(1) 若按照甲工程队的报价, 怎样设计能使水池造价最低? 最低造价是多少?



高考直通车
App生成

(2) 现有乙工程队也参与投标,其给出的整体报价为 $a(x^2+y^2) + 283200$ 元,其中 $5 \leq a \leq 6$,试问甲工程队一定能中标吗? (报价总低于对手即为中标)

【解析】(1) 由题意得 $3 \cdot xy = 4800$, 得 $xy = 1600$, 甲工程队的造价为 $150 \times xy + 120 \times 2(x+y) \times 3 = 240000 + 720(x+y)$, 因为 $xy = 1600$, 所以 $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 80$, 当且仅当 $x=y=40$ 时取等即 $240000 + 720(x+y) \geq 297600$

所以将贮水池的池底设计成边长为 40 米的正方形时造价最低,最低造价是 297600 元

(2) 若甲工程队一定能竞标成功,则对任意 $x>0, y>0$,

不等式 $240000 + 720(x+y) < a(x^2+y^2) + 283200$ 恒成立,

即对任意 $x>0, y>0$, $a > \frac{720(x+y-60)}{x^2+y^2} = \frac{720(x+y-60)}{(x+y)^2-2xy}$ 恒成立.

令 $x+y-60=t \in [20, +\infty)$, 则 $a > \frac{720t}{(t+60)^2-3200} = \frac{720}{t+\frac{400}{t}+120}$,

由于 $t+\frac{400}{t}+120 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{400}{t}}+120=160$, 所以 $\frac{720}{t+\frac{400}{t}+120} \leq \frac{9}{2}$,

当且仅当 $t=20$, 即 $x=y=40$ 时, 取“=”,

所以要使甲工程队一定能竞标成功, 则 $a > \frac{9}{2}$.

由于 $a \geq 5 > \frac{9}{2}$, 所以甲工程队一定能竞标成功

19. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(2) 记 $g(x) = |f(x) - 5|$.

(i) 讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并说明理由. 再请直接写出 $g(x)$ 的单调区间;

(ii) 是否存在这样的区间 $[a, b] (a>0)$, 使得 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数, 且 $g(x)$ 的取值在 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$. 若存在, 求出区间 $[a, b]$; 若不存在, 请说明理由.



高考直通车
App生成

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$$

所以函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的奇函数.

(2) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{4}{x_1} - x_2 - \frac{4}{x_2} = (x_1 - x_2) + \left(\frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2}\right) = (x_1 - x_2)\left(1 - \frac{4}{x_1 x_2}\right) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2}$$

当 $x_1 > x_2 \geq 2$ 时, $x_1 - x_2 > 0, x_1 x_2 > 4, x_1 x_2 - 4 > 0$, 即 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2} > 0, f(x_1) - f(x_2) > 0$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增

当 $2 \geq x_1 > x_2 > 0$ 时, $x_1 - x_2 > 0, 0 < x_1 x_2 < 4, x_1 x_2 - 4 < 0$, 即 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2} < 0$,

$f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减.

$g(x)$ 的单调递减区间为 $(-2, 0), (0, 1), (2, 4)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -2), (1, 2), (4, +\infty)$

(2) 因为 $a > 0$, 且 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调, 而 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(2, 4)$ 上单调递减, 在 $(1, 2)$ 和 $(4, +\infty)$ 上单调递增,



高考直通车
App生成

①若 $[a, b] \subseteq [1, 2]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, $g(x)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$, 则 $\begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}a \\ g(b) = \frac{1}{2}b \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a + \frac{4}{a} - 5| = \frac{1}{2}a \\ |b + \frac{4}{b} - 5| = \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - \frac{4}{a} + 5 = \frac{1}{2}a \\ -b - \frac{4}{b} + 5 = \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 10a + 8 = 0 \\ 3b^2 - 10b + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ 或 } \frac{4}{3} \\ b = 2 \text{ 或 } \frac{4}{3} \end{cases}$$

因为 $a < b$, 所以 $a = \frac{4}{3}, b = 2$, 所以区间 $[\frac{4}{3}, 2]$ 符合题意

②若 $[a, b] \subseteq [4, +\infty)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, $g(x)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$, 则 $\begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}a \\ g(b) = \frac{1}{2}b \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a + \frac{4}{a} - 5| = \frac{1}{2}a \\ |b + \frac{4}{b} - 5| = \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{4}{a} - 5 = \frac{1}{2}a \\ b + \frac{4}{b} - 5 = \frac{1}{2}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 10a + 8 = 0 \\ b^2 - 10b + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 - \sqrt{17} \text{ 或 } 5 + \sqrt{17} \\ b = 5 - \sqrt{17} \text{ 或 } 5 + \sqrt{17} \end{cases}, \text{ 因为 } a < b,$$

所以 $a = 5 - \sqrt{17}, b = 5 + \sqrt{17}$, 因为 $a \geq 4, 5 - \sqrt{17} < 4$, 不合要求, 故此种情况不存在区间 $[a, b]$

③若 $[a, b] \subseteq (0, 1]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, $g(x)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$, 则 $\begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}b \\ g(b) = \frac{1}{2}a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a + \frac{4}{a} - 5| = \frac{1}{2}b \\ |b + \frac{4}{b} - 5| = \frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{4}{a} - 5 = \frac{1}{2}b \text{ ①} \\ b + \frac{4}{b} - 5 = \frac{1}{2}a \text{ ②} \end{cases}, \text{ ①} - \text{②} \text{ 得 } a - b + \frac{4(b-a)}{ab} = \frac{1}{2}(b-a), \text{ 化简得 } ab = \frac{8}{3}$$

因为 $a, b \in (0, 1]$, 且 $a < b$, 所以 $ab < 1$, 所以 $ab = \frac{8}{3}$ 无解, 故此种情况不存在区间 $[a, b]$

④若 $[a, b] \subseteq [2, 4]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, $g(x)$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$, 则 $\begin{cases} g(a) = \frac{1}{2}b \\ g(b) = \frac{1}{2}a \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a + \frac{4}{a} - 5| = \frac{1}{2}b \\ |b + \frac{4}{b} - 5| = \frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - \frac{4}{a} + 5 = \frac{1}{2}b \text{ ①} \\ -b - \frac{4}{b} + 5 = \frac{1}{2}a \text{ ②} \end{cases}, \text{ ①} - \text{②} \text{ 得 } b - a + \frac{4(a-b)}{ab} = \frac{1}{2}(b-a), \text{ 化简得 } ab = 8$$

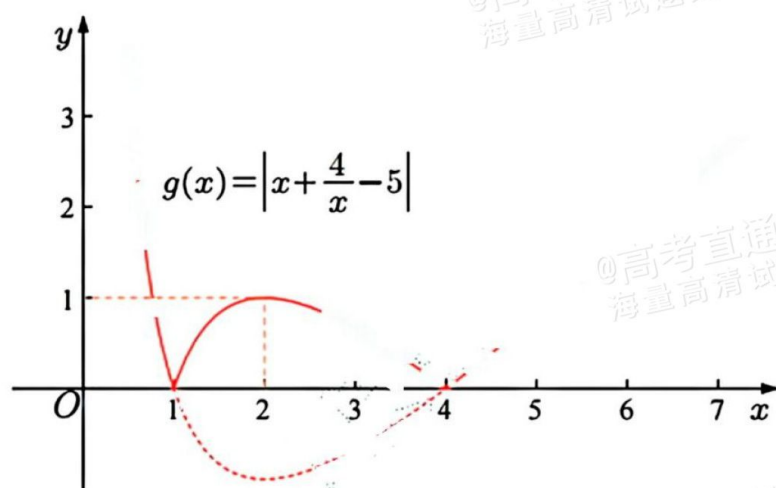
因为 $a, b \in [2, 4]$, 且 $a < b$, 所以 $ab < 8$, 所以 $ab = 8$ 无解, 故此种情况不存在区间 $[a, b]$

综上, 符合题意的区间为 $[\frac{4}{3}, 2]$



高考直通车
App生成

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载



@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载



高考直通车
App生成