

2025-2026 学年上期高一年级期中联考试题

数学学科

考试时间：120 分钟 分值：150 分

注意事项：本试卷分试题卷和答题卡两部分。考生应首先阅读试题卷上的文字信息，然后在答题卡上作答（答题注意事项见答题卡）。在试题卷上作答无效。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{4}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$, 则 $\complement_U M =$ ()
A. $\{2, 4\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{1, 3\}$
2. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 则 “ $a|c| > b|c|$ ” 是 “ $a > b$ ” 的 ()
A. 充要条件 B. 既不充分也不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 充分不必要条件
3. 命题 “ $\forall x > 1, |x| + 1 > 2$ ” 的否定为 ()
A. $\forall x > 1, |x| + 1 \leq 2$ B. $\exists x > 1, |x| + 1 \leq 2$
C. $\forall x \leq 1, |x| + 1 \leq 2$ D. $\exists x \leq 1, |x| + 1 \leq 2$
4. 若幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 11)x^m$ 为奇函数, 则实数 $m =$ ()
A. 4 B. 3 C. -3 D. -3 或 4
5. 已知 $a = (\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}, b = (\frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}, c = (\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
A. $b > c > a$ B. $c > b > a$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$
6. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-2, 5]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x+1)}{x+1}$ 的定义域是 ()
A. $[-2, -1) \cup (-1, 5]$ B. $[-3, -1) \cup (-1, 11]$
C. $[-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, 2]$ D. $[-\frac{3}{2}, 2]$
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax, & x \leq 1 \\ a^x + 4, & x > 1 \end{cases}$, 且对于任意的 x_1, x_2 , 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 (x_1 \neq x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $[1, 5)$ B. $(1, 5]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[5, +\infty)$
8. 当一个含有非零实数的数集 G 满足 “如果 $a, b \in G$, 则 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in G (b \neq 0)$ ” 时, 我们称 G 就是一个数域. ① 0 和 1 是任何数域的元素; ② $2^{2025} \in G$; ③ 集合



$P = \{x | x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个数域；④有理数集 Q 是最小的数域（即对于任意的数域 G ，都有 $Q \subseteq G$ ）。以上关于数域的说法中不正确的是（ ）

- A. ① B. ② C. ③ D. ④

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，则下列结论正确的有（ ）

A. 若 $a > b, c > d$ ，则 $a + c > b + d$

B. 若 $a < b$ ，则 $a^2 > b^2$

C. 若 $a > b > 0, m > 0$ ，则 $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$

D. 若 $a \in (0, 1)$ ，则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{1-a} \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

10. 已知 $a < b < 0$ ，且关于 x 的不等式 $2ax^2 + (a-2)bx - b^2 > 0$ 恰有 4 个整数解，

则 b 的取值可以是（ ）

- A. -7 B. -8 C. -9 D. -10

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，对任意实数 x, y 满足： $f(x-y) = f(x) - f(y) + 1$ 。

当 $x > 0$ 时， $f(x) < 1$ 。则下列选项正确的是（ ）

A. $f(0) = 1$

B. 函数 $y = f(x) + 1$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的减函数

D. 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，恒有 $f(x^2 - x + 1) > 1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 方程 $x^2 - \left(a + \frac{2}{a}\right)x + 2 = 0$ 的解集有且仅有两个子集，则实数 a 的值为_____。

13. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f(3-x) = 2x + 11$ ，则 $f(x) =$ _____。

14. 已知存在 $x \in [2, +\infty)$ ，使得 $\frac{a^2 + 2a + 1}{x} \geq \frac{4}{x^2 - x} + 1$ 成立，则实数 a 的取值范围为_____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) (1) 求值： $1.5^{\frac{1}{3}} \times \left(-\frac{7}{6}\right)^0 + \frac{1}{3} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3})^6 - \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + |-0.01|^{\frac{1}{2}}$ ；



(2) 已知 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2$, 求 $\frac{a^2 + a^{-2} + 3}{a + a^{-1} - 1}$ 的值.

16. (15 分) 已知集合 $A = \{x | a-1 \leq x \leq 2a+3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x \leq 4\}$, 全集 $U = \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $A \cup (\complement_U B)$;

(2) 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

17. (15 分) 函数 $f(x) = ax^2 - (2-2a)x$ ($a \in \mathbf{R}$).

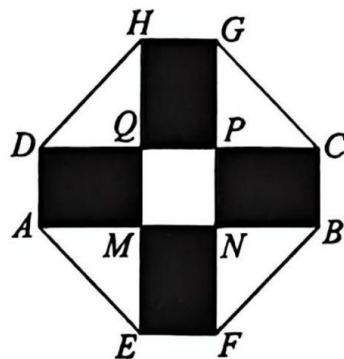
(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调, 求实数 a 的取值范围;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 4$.



18. (17分) 如图, 居民小区要建一座八边形的休闲场所, 它的主体造型平面图是由两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成的面积为 200m^2 的十字形地域. 计划在正方形 $MNPQ$ 上建一座花坛, 造价为 $1700\text{元}/\text{m}^2$; 在四个相同的矩形 (图中阴影部分) 上铺花岗岩地坪, 造价为 $104\text{元}/\text{m}^2$; 再在四个空角 (图中四个三角形) 上铺草坪, 造价为 $32\text{元}/\text{m}^2$. 设总造价为 S (单位: 元), AD 长为 x (单位: m).

- (1) 求 S 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (2) AD 长为 5m 时, 求该休闲场所的总造价;
- (3) 当 AD 长为多少 m 时, 该休闲场所的总造价最小? 最小值是多少?



19. (17分) 我们知道, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 是奇函数, 也即是满足 $f(x) + f(2a-x) = 2b$.

已知函数 $f(x) = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1}$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并利用定义证明;
- (2) 求证: 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, \frac{3}{2})$ 成中心对称图形;
- (3) 若对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 + x_2 > 2$, 恒有 $f(x_1) + f(x_2) - m^2 + 2m > 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.



2025-2026 学年上期高一年级期中联考试题

数学 学科评分细则

一、单选题.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	A	C	B	C

二、多选题.

题号	9	10	11
答案	ACD	CD	AC

三、填空题.

12. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$; 13. $-2x + \frac{23}{3}$; 14. $(-\infty, -\sqrt{5}-1] \cup [\sqrt{5}-1, +\infty)$.

四、解答题.

15. 【详解】(1) 原式 $= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{1}{3} \times \left(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} + 0.1$
 $= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \times (2^2 \times 3^3) - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + 0.1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$
 $= 36 + 0.1 = 36.1 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) $\because a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 2, \therefore a + a^{-1} = \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 2 = 2, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 = 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$\therefore \frac{a^2 + a^{-2} + 3}{a + a^{-1} - 1} = \frac{2+3}{2-1} = 5 \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

16. 【详解】(1) 当 $a=1$ 时, 集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 5\}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

- $\because x^2 - 3x \leq 4, \therefore x^2 - 3x - 4 \leq 0$ 即 $(x-4)(x+1) \leq 0$
- $\therefore -1 \leq x \leq 4, \therefore B = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$ 3 分
- $\therefore C_U B = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 4\}$ 5 分
- $\therefore A \cup (C_U B) = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ 7 分
- (2) 由已知得 $A \subseteq B$, 9 分
- 当集合 $A = \emptyset$ 时, 则 $a-1 > 2a+3$, 解得 $a < -4$; 11 分
- 当集合 $A \neq \emptyset$ 时, 则 $a-1 \leq 2a+3$, 解得 $a \geq -4$
- 又 $\because A \subseteq B, \therefore \begin{cases} a-1 \geq -1 \\ 2a+3 \leq 4 \end{cases}$, 解得 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$
- $\therefore$ 当集合 $A \neq \emptyset$ 时, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 14 分
- 综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -4) \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 15 分
17. 【详解】若 $a = 0$, 则 $f(x) = -2x$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意. $\therefore a = 0$; 2 分
- 若 $a \neq 0$, 由 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调可得 $\frac{2-2a}{2a} \leq 2$ 即 $\frac{1-a}{a} \leq 2$
- $\therefore \frac{1-3a}{a} \leq 0$
- $\therefore a(3a-1) \geq 0$ 且 $a \neq 0$
- $\therefore a < 0$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$ 5 分
- 综上, $a \leq 0$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$ 6 分
- (2) $f(x) < 0$ 即为 $ax^2 - (2-2a)x - 4 < 0, \therefore (ax-2)(x+2) < 0$, 8 分
- ① 当 $a = 0$ 时, $-x-2 < 0$, 不等式的解集为 $\{x | x > -2\}$, 9 分
- ② 当 $a \neq 0$ 时, 令 $(ax-2)(x+2) = 0$ 得, $x_1 = \frac{2}{a}, x_2 = -2$ 10 分
- (I) 若 $a > 0$ 时, $\frac{2}{a} > 0$, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -2 < x < \frac{2}{a}\right\}$; 11 分

(II) 若 $a < 0$ 时, $\frac{2}{a} < 0$

当 $-2 = \frac{2}{a}$ 时, $a = -1$, 不等式的解集为 $\{x | x \neq -2\}$;

当 $\frac{2}{a} > -2$ 即 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > \frac{2}{a}\}$;

当 $\frac{2}{a} < -2$ 即 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x < \frac{2}{a} \text{ 或 } x > -2\}$ 14 分

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x > -2\}$;

当 $a > 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | -2 < x < \frac{2}{a}\}$;

当 $a = -1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq -2\}$;

当 $a < -1$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > \frac{2}{a}\}$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < \frac{2}{a} \text{ 或 } x > -2\}$ 15 分

18. 【详解】(1) 设 $DQ = y$ m, 则 $x^2 + 4xy = 200$, 所以 $y = \frac{200 - x^2}{4x}$,

因为 $x > 0, y > 0$, 即 $\frac{200 - x^2}{4x} > 0$ 且 $x > 0$, 解得 $0 < x < 10\sqrt{2}$, 2 分

所以 $S = 1700x^2 + 104 \cdot 4xy + 32 \cdot 2y^2 = 1600x^2 + \frac{160000}{x^2} + 19200$,

所以 S 关于 x 的解析式为 $S = 1600x^2 + \frac{160000}{x^2} + 19200, 0 < x < 10\sqrt{2}$ 8 分

(2) 当 $x = 5$ m 时, 可得 $S(5) = 1600 \times 5^2 + \frac{160000}{5^2} + 19200 = 40000 + 6400 + 19200 = 65600$

所以 AD 长为 5 m 时, 该休闲场所的总造价 65600 元 11 分

(3) 由 (1) 得

$$S = 1600x^2 + \frac{160000}{x^2} + 19200 \geq 2\sqrt{1600x^2 \times \frac{160000}{x^2}} + 19200 = 51200$$

当且仅当 $1600x^2 = \frac{160000}{x^2}$, 即 $x = \sqrt{10}$ 时, 等号成立 15 分

所以当 $x = \sqrt{10}$ 时, 该休闲场所的总造价最小, 最小值为 51200 元. 17 分

19. 【详解】(1) 函数 $f(x) = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1}$ 在定义域 R 上单调递增, 证明如下:

$$f(x) = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1} = 3 - \frac{3}{3^{x-1} + 1},$$

任取 $x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = 3 - \frac{3}{3^{x_1-1} + 1} - \left(3 - \frac{3}{3^{x_2-1} + 1} \right) = \frac{3^{x_1} - 3^{x_2}}{(3^{x_1-1} + 1)(3^{x_2-1} + 1)},$$

$$\because x_1 < x_2 \quad \therefore 3^{x_1-1} + 1 > 0, 3^{x_2-1} + 1 > 0, 3^{x_1} - 3^{x_2} < 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{3^{x_1} - 3^{x_2}}{(3^{x_1-1} + 1)(3^{x_2-1} + 1)} < 0 \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ 在定义域 R 上单调递增 7 分

$$(2) \text{ 证明: } \because f(x) = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1}, f(2-x) = \frac{3^{2-x}}{3^{1-x} + 1}$$

$$\therefore f(x) + f(2-x) = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1} + \frac{3^{2-x}}{3^{1-x} + 1} = \frac{3^x}{3^{x-1} + 1} + \frac{3}{1 + 3^{x-1}} = 3$$

$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 成中心对称图形 12 分

(3) $\because x_1 + x_2 > 2$ 即 $x_1 > 2 - x_2$. 又由 (1) 可知: $f(x)$ 在定义域 R 内单调递增,

$$\therefore f(x_1) > f(2 - x_2)$$

$$\text{又由 (2) 可知: } f(x) + f(2-x) = 3 \text{ 即 } f(2-x) = 3 - f(x)$$

$$\therefore f(x_1) > f(2 - x_2) = 3 - f(x_2) \text{ 即 } f(x_1) + f(x_2) > 3 \text{ 15 分}$$

$$\because f(x_1) + f(x_2) - m^2 + 2m > 0 \text{ 即 } f(x_1) + f(x_2) > m^2 - 2m \text{ 对 } \forall x_1, x_2 \in R \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore m^2 - 2m \leq 3 \text{ 即 } m^2 - 2m - 3 \leq 0,$$

$$\therefore -1 \leq m \leq 3$$

所以实数 m 的取值范围为 $[-1, 3]$ 17 分