

永吉实验高中高一（9月份）数学学科试卷

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；
2. 回答第I卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选其他答案标号.写在本试卷上无效；
3. 回答第II卷时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效；
4. 测试范围：必修第一册第一章、第二章；
5. 考试结束后，将本试卷个人保留，上交答题卡.

第 I 卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$, 那么 $A \cap B = ()$
A. $\{0, 1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 1\}$
2. 命题 $\forall x > 1, x^2 - m > 1$ 的否定是 $()$
A. $\exists x > 1, x^2 - m \leq 1$ B. $\exists x \leq 1, x^2 - m \leq 1$
C. $\forall x > 1, x^2 - m \leq 1$ D. $\forall x \leq 1, x^2 - m \leq 1$
3. 不等式 $\frac{7}{x+1} < 1$ 的解集为 $()$
A. $(-1, 6)$ B. $(-6, 1)$ C. $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$ D. $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$
4. 命题 $p: -3 \leq x \leq 1$, $q: x \leq a$. 若 q 的一个充分不必要条件是 p , 则 a 的取值范围是 $()$
A. $(-3, +\infty)$ B. $[-3, +\infty)$
C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
5. 若 $a > b > 0$, 则下列不等式一定成立的是 $()$
A. $\frac{b}{a} > \frac{b+1}{a+1}$ B. $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$ C. $a + \frac{a}{b} > b + \frac{b}{a}$ D. $\frac{2a+b}{a+2b} > \frac{a}{b}$
6. 已知集合 A 满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则满足条件的集合 A 的个数为 $()$
A. 1 个 B. 2 个 C. 4 个 D. 8 个
7. 已知实数 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{2b} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}$ 的最小值是 $()$
A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. 2
8. 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 $()$



A. $0 \leq k \leq 1$

B. $0 < k \leq 1$

C. $k < 0$ 或 $k > 1$

D. $k \leq 0$ 或 $k \geq 1$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下面四个说法中正确的是 ()

A. 10 以内的质数组成的集合是 $\{2, 3, 5, 7\}$

B. 由 2, 3 组成的集合可表示为 $\{2, 3\}$ 或 $\{3, 2\}$

C. 方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的所有解组成的集合是 $\{2, 2\}$

D. $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 表示同一个集合

10. 下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $a > b > 0$, 则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $-2 < a < 3$, $1 < b < 2$, 则 $-4 < a - b < 2$

C. 若 $a > b > 0$ 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$

D. 若 $c > a > b$, 则 $\frac{1}{c-a} > \frac{1}{c-b}$

11. 正数 m, n 满足 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 2$, 则下列结论正确的是 ()

A. $m + 2n \geq 4$

B. $mn \geq 2$

C. $m^2 + 4n^2 \leq 8$

D. $\frac{1}{m-1} + \frac{2}{2n-1} \geq 2\sqrt{2}$

第 II 卷 (非选择题)

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若 $p: -2 < x < 2$, $q: \sqrt{x} < 4$, 则 p 是 q 的 _____ 条件. (填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”)

13. 若集合 $A = \{x - 3, x - 6, 4\}$, 且 $7 \in A$, 则 $x =$ _____.

14. 若关于 x 的不等式 $-x^2 + (2a + 1)x - 2a > 0$ 恰有两个整数解, 则 a 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程及验算步骤。

15. (13 分) 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, $B = \{x | x - m > 0\}$.

(1) 当 $m = -2$ 时, 求 $A \cup (C_U B)$;

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

16. 如图, 图片中为初中化学实验试题. 已知 yg 不饱和的盐水中含有 xg 氯化钠 ($y > x > 0$), 若再加入 mg 氯化钠 ($m > 0$) 并能完全溶解, 则盐水变得更咸了.



(1) 用数学中的不等式解释这一现象;

(2) 证明 (1) 中的不等式.

17. (15分) 已知命题 p : 方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$ 有两个不相等的实数根; 命题 q : $m < 1$.

(1) 若 $\neg p$ 为假命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 p, q 中一真一假, 求实数 m 的取值范围.

18. (17分) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b - 4ab = 0$.

(1) 证明: $ab \geq \frac{1}{2}$;

(2) 求 $a + 2b$ 的最小值.

19. (17分) 已知函数 $g(x) = x^2 - kx + 2k - 4 (k \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $k = 5$ 时, 求不等式 $g(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 当 $x > 2$ 时, 关于 x 的不等式 $g(x) \geq -9$ 恒成立, 求 k 的取值范围.



1. B 2. A 3. C 4. D 5. C 6. D 7. A 8. A 9. AB 10. BCD

11. ABD

【解答过程】对于 A,

$$m+2n = \frac{1}{2}(m+2n)\left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4n}{m} + \frac{m}{n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(4 + 2\sqrt{\frac{4n}{m} \cdot \frac{m}{n}}\right) = 4,$$

当且仅当 $\frac{4n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m = 2n = 2$ 时等号成立, 故 A 正确,

对于 B, $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 2 \geq 2\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{1}{n}}$, 即 $nm \geq 2$,

当且仅当 $\frac{4n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m = 2n = 2$ 时等号成立, 故 B 正确,

对于 C, 由 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 2$ 可得 $\frac{2n+m}{mn} = 2 \Rightarrow 2n+m = 2mn$,

故 $m^2 + 4n^2 = (m+2n)^2 - 4mn = 4m^2n^2 - 4mn = 4\left(nm - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$, 由 B 选项可知

$nm \geq 2$,

$$故 m^2 + 4n^2 = 4\left(nm - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \geq 4\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 8,$$

当且仅当 $m = 2n = 2$ 时等号成立, 故 C 错误,

对于 D, 由 $\frac{2n+m}{mn} = 2 \Rightarrow 2n+m = 2mn$ 可得 $\frac{1}{2n-1} = \frac{m}{2n}$, $\frac{1}{m-1} = \frac{2n}{m}$,

$$故 \frac{1}{m-1} + \frac{2}{2n-1} = \frac{2n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 故 D 正确,

故选: ABD.

12. 既不充分也不必要 13. 13.

14. $\{a \mid -1 \leq a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2} < a \leq 2\}$

【解答过程】令 $x^2 - (2a+1)x + 2a = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2a$.

当 $2a > 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $x^2 - (2a+1)x + 2a < 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 2a\}$, 则 $3 < 2a \leq 4$,

解得 $\frac{3}{2} < a \leq 2$;

当 $2a = 1$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $x^2 - (2a+1)x + 2a < 0$ 无解, 所以 $a = \frac{1}{2}$ 不符合题意;

当 $2a < 1$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式 $x^2 - (2a+1)x + 2a < 0$ 的解集为 $\{x | 2a < x < 1\}$, 则 $-2 \leq 2a < -1$, 解得 $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$.

综上, a 的取值范围是 $\{a | -1 \leq a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{3}{2} < a \leq 2\}$.

15 .

【解答过程】(1) 因为集合 $B = \{x | x - m > 0\}$, 所以集合 $B = \{x | x > m\}$, 可得当 $m = -2$ 时, 集合 $B = \{x | x > -2\}$, 又因为全集 $U = \mathbb{R}$, 所以 $\complement_U B = \{x | x \leq -2\}$, 又因为集合 $A = \{x | -3 < x < 5\}$, 所以 $A \cup (\complement_U B) = \{x | x < 5\}$.

(2) 因为 $A \cap B = A$, 所以 $A \subseteq B$, 又因为集合 $B = \{x | x > m\}$, $A = \{x | -3 < x < 5\}$, 所以 $m \leq -3$, 即实数 m 的取值范围为 $\{m | m \leq -3\}$.

16 .

【解答过程】(1) 因为 $\frac{x+m}{y+m} > \frac{x}{y}$, 所以盐水中含有氯化钠的浓度变大了, 则盐水变得更咸了.

(2) 由 $\frac{x+m}{y+m} - \frac{x}{y} = \frac{y(x+m) - x(y+m)}{y(y+m)} = \frac{(y-x)m}{y(y+m)}$, 因为 $y > x > 0 \Rightarrow y - x > 0, m > 0$, 所以 $\frac{(y-x)m}{y(y+m)} > 0$,

即 $\frac{x+m}{y+m} > \frac{x}{y}$.

17. 【解答过程】(1) 由题意有: $\neg p$ 为假命题, 所以 p 为真命题,

又由方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$ 有两个不相等的实数根, 所以 $\Delta = 8 - 4m > 0 \Rightarrow m < 2$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2)$;

(2) 由(1)有 p 为真命题, 则 $m < 2$, 因为 p, q 中一真一假, 所以当 p 真, q 假时, 有 $\begin{cases} m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m < 2$, 当 p 假, q 真时, 有 $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$, 综上所述, $1 \leq m < 2$, 所以实数 m 的取值范围为 $[1, 2)$.

18 .

【解答过程】(1) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = 4ab$,

由基本不等式得 $2a+b \geq 2\sqrt{2ab}$ ，即 $4ab \geq 2\sqrt{2ab}$ ，解得 $ab \geq \frac{1}{2}$ ，

当且仅当 $2a=b$ ，即 $a=\frac{1}{2}$ ， $b=1$ 时，等号成立，证毕；

(2) 因为 $a>0$ ， $b>0$ ，且 $2a+b=4ab$ ，所以 $\frac{1}{2b}+\frac{1}{4a}=1$ ，

所以 $a+2b=(a+2b)\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{4a}\right)=\frac{a}{2b}+\frac{1}{4}+1+\frac{b}{2a} \geq \frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{a}{2b} \cdot \frac{b}{2a}}=\frac{9}{4}$ ，

当且仅当 $\frac{a}{2b}=\frac{b}{2a}$ ，即 $a=b=\frac{3}{4}$ 时，等号成立，故 $a+2b$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$ 。

19 .

【解答过程】(1) 当 $k=5$ 时， $g(x)=x^2-5x+6$ ，

则不等式 $g(x) \geq 0$ ，即 $x^2-5x+6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0$ ，

解得 $x \leq 2$ ，或 $x \geq 3$ ，不等式 $g(x) \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ 。

(2) 当 $x>2$ 时，关于 x 的不等式 $g(x) \geq -9$ 恒成立，

即当 $x>2$ 时，关于 x 的不等式 $g(x)=x^2-kx+2k-4 \geq -9$ 恒成立，

$\Leftrightarrow$ 在 $x>2$ 时， $k \leq \frac{x^2+5}{x-2}$ 恒成立，令 $h(x)=\frac{x^2+5}{x-2} (x>2)$ ，

令 $t=x-2$ ， $t>0$ ，则 $x=t+2$ ，故 $h(x)=\frac{x^2+5}{x-2} (x>2) \Leftrightarrow y=\frac{(t+2)^2+5}{t} (t>0)$ ，

又 $y=\frac{(t+2)^2+5}{t}=\frac{t^2+4t+9}{t}=t+\frac{9}{t}+4 \geq 2\sqrt{t \times \frac{9}{t}}+4=10$ ，当且仅当 $t=\frac{9}{t}$ ，即 $t=3$ 时等号成立，

故当 $t=3$ ，即 $x=5$ 时， $h(x)_{\min}=h(5)=10$ ，

因此可得 $k \leq 10$ ，

即当 $x>2$ 时，关于 x 的不等式 $g(x) \geq -9$ 恒成立， k 的取值范围为 $(-\infty, 10]$ 。