成都七中高 2024 级高一数学期中测试

考试时间 120 分钟　　满分 150 分

一、单选题：本题 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 集合的知识是现代数学的基础，也是高中数学的基础. 关于集合论，希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物，在存粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”，罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”. 集合论创立于 19 世纪末，其创立者是德国数学家（　）

A．莱布尼茨　　B．欧拉　　C．高斯　　D．康托尔

2. 用列举法可将集合 $\{x\in N\mid 3x<25-2x\}$ 表示为（　）

A．$\{1,2,3,4\}$　　B．$\{1,2,3,4,5\}$　　C．$\{0,1,2,3,4\}$　　D．$\{0,1,2,3,4,5\}$

3. 命题“$\exists x\in Q,|x|\geq -x$”的否定是（　）

A．$\forall x\notin Q,|x|<-x$　　B．$\forall x\in Q,|x|<-x$　　C．$\exists x\notin Q,|x|<-x$　　D．$\exists x\in Q,|x|<-x$

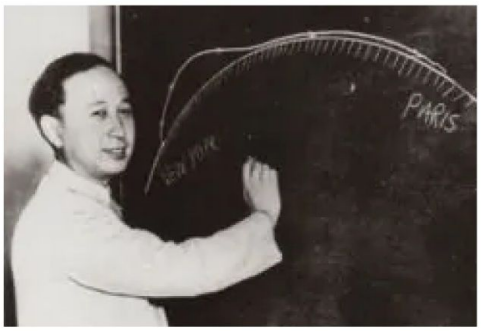
4. 已知 $p:a\in P\cup Q$，$q:a\in P\cap Q$，则 p 是 q 的（　）

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5. 不等式 $\frac{2x+1}{x-2}\geq 1$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$　　C．$[-3,2)$　　D．$[-3,2]$

6. 钱学森弹道，即“助推—滑翔”弹道，是中国著名科学家钱学森于 1948 年提出的，该弹道设计具有非常高的科学性和实用性，将弹道导弹和飞航导弹的轨迹融合，使导弹同时具备突防性和灵活性，作战能力显著增强。据报道，2019 年国庆大阅兵亮相的部分东风系列中程和洲际导弹就采用了该弹道设计，这极大地提升了我国的国防实力。关心国防建设的某高一学生，在学习了“函数的应用”后，用 $y=\frac{bx}{1+ax^2}$ 的图象拟合某一钱学森弹道，其中 x(千公里)表示导弹横向位移，y(千公里)表示导弹纵向位移，在网络公开平台可获得两组数据: $x=1$，$y=\frac{1}{4}$；$x=3$，$y=\frac{3}{28}$，则 a,b 分别为（　）



A．$1,3$　　B．$3,1$　　C．$-3,-\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2},-3$

7. 若函数 $y=f(x-1)$ 是偶函数，则 $f(x)=$（　）

A．$f(-2+x)$　　B．$f(2+x)$　　C．$f(-2-x)$　　D．$f(2-x)$

8. 若 $m\in Z$，则关于 x 的方程 $x^m+x=0$ 的相异实数根个数最大值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．无最大值

二、多选题：本题 3 个小题，每小题 6 分，共 18 分，全选对得 6 分，部分选对得部分分，有错选得 0 分.

高考直通车
App生成

9. 与函数 $y=x^2$ 是同一函数的有（　　）

A．$g(t)=t^2$　　B．$f(x)=(\sqrt{x})^4$　　C．$h(n)=\sqrt{n^4}$　　D．$y=\dfrac{x^5}{x^3}$

10. 下列命题是真命题的是（　　）

A．若 $2<a<3$，$-2<b<-1$，则 $3<a-b<5$　　B．若 $a,b\in R$，则 $a^2+b^2-1>2(a+b-1)$

C．若 $0<-c<a<b$，则 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$　　D．若 $a>b>0$，$c>0>d$，则 $ac>bd$

11. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 A，且对任意 $x_1\in A$，总存在 $x_2\in A$，使得 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则称 $f(x)$ 具有性质 P，那么以下满足性质 P 的函数有（　　）

A．$y=-x$　　B．$y=-x^2+x$　　C．$y=\dfrac{x}{x-1}$　　D．$y=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1},x\le 0,\\ -x^2+x,x>0\end{cases}$

三、填空题：本题 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 不等式 $|3x-4|\ge 5$ 的解集为_____.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x+2k,x\ge 1,\\ \dfrac{k}{x},0<x<1\end{cases}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 k 的取值范围为_____.

14. 若 a，$b>0$，且 $ab=a+b+3$，则 $a+b+ab$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题 5 个小题，15 题 13 分，16、17 题各 15 分，18、19 题各 17 分，共 77 分.

15. 已知集合 $A=\{x\,|\,1<x<3\}$，$B=\{x\,|\,a<x<3a-2\}$.

(1)若 $a=2$，求 $A\cup B$，$(\complement_R A)\cap B$；

(2)若 $A\cap B=B$，求 a 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$.

（1）若 $b=\dfrac{a}{2}$，讨论关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集（用 a 表示）；

（2）若 $b=0$，当 $x\in[2,3]$ 时，$y=f(x)$ 图象恒在 $y=-2$ 图象的上方，求 a 的取值范围.

@高考直通车试题库 海量高清试题免费下载

高考直通车 App生成

17. 奇函数 $f(x)$ 定义域为 $[-15,15]$，当 $x\in[0,15]$ 时，$f(x)=2\sqrt{x+1}-\frac{x}{2}+m$.

（1）求 m 的值，并给出当 $x\in[-15,0)$ 时 $f(x)$ 的解析式；

（2）求函数 $f(x)$ 的值域.

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

18. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}-2tx+t^2\ (t\in R)$.

(1)设集合 $F=\{(x,y)\mid \forall t\in R, y\le f(x)\}$，判断 $(2,1)$ 是否是 F 中的元素，并说明理由；

(2)证明：当 $x\neq 0$ 时，$f(1+x)+f(1-x)\ge 2$；

(3)当 $t>0$ 时，若有方程 $f(x)=0$ 的两相异实根均在 $(0,3)$ 内，求 t 的取值范围.

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

19. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

①对 $\forall x,y>0$，有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 成立；②$f(x)>0$；③当 $x>1$ 时，有 $f(x)<1$；④$f(2)=\frac{1}{3}$.

(1)计算 $f(1)$，$f(4)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(\sqrt{2})$，$\frac{f(3a)}{f(6a)}$ 的值；

(2)证明：i）当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>1$，

ii) $f(x)$ 是减函数；

(3)设 $g(x)=f(x)+x$，记 $F(x)=g(x)\cdot g(\frac{2}{x})$，求 $F(x)$ 的最小值.

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

高考直通车
App生成

成都七中高 2024 级高一数学期中测试参考答案

五、单选题.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	B	B	A	B	C	B

六、多选题.

9	10	11
AC	ACD	CD

七、填空题.

12. $(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[3,+\infty)$　　13. $[-1,0)$　　14. 15

八、解答题.

15. 解：(1)当 $a=2$ 时，$B=\{x\mid 2<x<4\}$，$A\cup B=\{x\mid 1<x<4\}$，(2 分)

$\complement_R A=\{x\mid x\le 1$，或$x\ge 3\}$，(4 分)

$(\complement_R A)\cap B=\{x\mid 3\le x<4\}$.(6 分)

(2) $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$，(8 分)

1° 若 $B=\varnothing$，有 $a\ge 3a-2$，即 $a\le 1$，此时满足 $B\subseteq A$；(10 分)

2° 若 $B\ne\varnothing$，有 $a<3a-2$，即 $a>1$，为满足 $B\subseteq A$，且有 $3a-2\le 3$，即 $1<a\le\frac{5}{3}$；(12 分)

综上，$a\le\frac{5}{3}$.(13 分)

16. 解：(1) $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$，而 $b=\frac{a}{2}$，对 $f(x)<0$，则有 $(x-a)(x-\frac{a}{2})<0$，

1) 当 $a<\frac{a}{2}$，即 $a<0$ 时，原不等式解集为 $(a,\frac{a}{2})$，(2 分)

2) 当 $a=\frac{a}{2}$，即 $a=0$ 时，原不等式解集为 $\varnothing$，(4 分)

3) 当 $a>\frac{a}{2}$，即 $a>0$ 时，原不等式解集为 $(\frac{a}{2},a)$，(6 分)

综上，当 $a<0$ 时，解集为 $(a,\frac{a}{2})$，当 $a=0$ 时，解集为 $\varnothing$，当 $a>0$ 时，解集为 $(\frac{a}{2},a)$；(7 分)

(2) 由题设知，$\forall x\in[2,3]$，$x^2-ax>-2$，(8 分)

分离变量可得 $\forall x\in[2,3]$，$a<x+\frac{2}{x}$，(10 分)

也即 $a<(x+\frac{2}{x})_{\min}$，$x\in[2,3]$，(11 分)

现证明 $g(x)=x+\frac{2}{x}$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，

$\forall x_1,x_2\in[2,3]$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，而 $x_1x_2\ge 4>2$，即 $x_1x_2-2>0$，

有 $g(x_1)-g(x_2)=x_1-x_2+\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}=(x_1-x_2)(\frac{x_1x_2-2}{x_1x_2})<0$，即 $g(x_1)<g(x_2)$.(13 分)

故 $g(x)_{\min}=g(2)=3$，即 $a<3$.(15 分)

注：讨论分析 $g(x)=x^2-ax+2$ 最小值的，可酌情给分.

@高考直通车试题库 海量高清试题免费下载

高考直通车 App生成

17. 解：（1）由 $f(x)$ 是奇函数知 $f(0)=0$，故 $2+m=0$，即 $m=-2$，(3 分)

当 $x\in[-15,0)$ 时，$-x\in(0,15]$，$f(-x)=2\sqrt{-x+1}+\frac{x}{2}-2$，而 $f(x)=-f(-x)$，

故 $f(x)=-2\sqrt{-x+1}-\frac{x}{2}+2$，$x\in[-15,0)$；(8 分)

（2）先考察 $f(x)$ 在 $(0,15]$ 上的值域，对 $y=2\sqrt{x+1}-\frac{x}{2}-2$，令 $u=\sqrt{x+1}$，

由 $x\in(0,15]$ 知 $u\in(1,4]$，$y=2u-\frac{u^2-1}{2}-2=-\frac{u^2}{2}+2u-\frac{3}{2}$，

当 $u=2$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{2}$，当 $u=4$ 时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，则有 $y\in[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$，(13 分)

再由奇函数 $f(x)$ 图象关于原点对称，可知 $f(x)$ 在 $x\in[-15,0)$ 上的值域为 $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$，

则 $f(x)$ 在 $[-15,15]$ 上的值域为 $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]\cup\{0\}\cup[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$，即 $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$. (15 分)

18. 解：(1) $\forall t\in R,1\le f(2)\Leftrightarrow\forall t\in R,1\le 5-4t+t^2\Leftrightarrow\forall t\in R,(t-2)^2\ge 0$，命题为真，(2 分)

故 $(2,1)$ 是 F 中的元素；(3 分)

（2）当 $x\neq 0$ 时，$f(1+x)+f(1-x)=\frac{(1+x)^2+1}{x}-2t(1+x)+t^2+\frac{(1-x)^2+1}{-x}-2t(1-x)+t^2=2t^2-4t+4$，

即 $f(1+x)+f(1-x)=2t^2-4t+4=2(t-1)^2+2\ge 2$；(8 分)

(3)令 $g(x)=(x-1)f(x)=x^2+1-(2tx-t^2)(x-1)=(1-2t)x^2+(t^2+2t)x+1-t^2$，$g(1)=2\neq 0$，

方程 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 为同解方程，设两根分别为 x_1、x_2，(10 分)

1）当 $1-2t<0$，即 $t>\frac{1}{2}$ 时，二次函数 $g(x)$ 开口向下，由题设知至少还应满足 $\begin{cases}g(0)<0,\\g(3)<0,\end{cases}$

解得 $1<t<5$，(12 分)

而 $g(1)=2>0$，可知 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,3)$，满足题设，(14 分)

2）当 $1-2t>0$，即 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，而二次函数 $g(x)$ 的对称轴 $x=-\frac{t^2+2t}{2(1-2t)}<0$，不满足题设，(16 分)

综上，$1<t<5$. (17 分)

注：若未用条件 $g(1)>0$ 或 $g(2)>0$，而又未清楚分析判别式大于 0、对称轴位置的酌情扣 1-2 分.

19. 解：(1) 对 $f(xy)=f(x)f(y)$，取 $x=y=1$，可得 $f(1)=1$ 或 0，题设知 $f(1)>0$，故得 $f(1)=1$，

取 $x=y=2$，可得 $f(4)=f(2)\cdot f(2)=\frac{1}{9}$，

取 $x=\frac{1}{2},y=2$，可得 $f(1)=f(\frac{1}{2})\cdot f(2)$，即 $f(\frac{1}{2})=\frac{f(1)}{f(2)}=3$，

取 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}$，可得 $f(2)=f(\sqrt{2})\cdot f(\sqrt{2})$，题设知 $f(\sqrt{2})>0$，即 $f(\sqrt{2})=\sqrt{f(2)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

取 $x=\frac{1}{2},y=6a$，可得 $f(3a)=f(\frac{1}{2})\cdot f(6a)$，即 $\frac{f(3a)}{f(6a)}=f(\frac{1}{2})=3$；(5 分)

（2）i）当 $x\in(0,1)$ 时，$\frac{1}{x}\in(1,+\infty)$，对 $f(xy)=f(x)f(y)$，取 $y=\frac{1}{x}$，

有 $f(\frac{1}{x})=\frac{f(1)}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}\in(0,1)$，故 $f(x)>1$，(8 分)

高考直通车
App生成

ii) $\forall x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，且 $x_1 < x_2$，即 $\frac{x_1}{x_2} < 1$，由 i）知 $f(\frac{x_1}{x_2}) > 1$，

对 $f(xy) = f(x)f(y)$，取 $x = \frac{x_1}{x_2}, y = x_2$，即 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = f(\frac{x_1}{x_2})$，

而 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_2)[\frac{f(x_1)}{f(x_2)} - 1] = f(x_2)[f(\frac{x_1}{x_2}) - 1] > 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，

故 $f(x)$ 是减函数； (12 分)

（3）对 $f(xy) = f(x)f(y)$，取 $y = \frac{2}{x}$，即 $f(x) \cdot f(\frac{2}{x}) = f(2) = \frac{1}{3}$，

$F(x) = (f(x) + x) \cdot [f(\frac{2}{x}) + \frac{2}{x}] = f(x) \cdot f(\frac{2}{x}) + xf(\frac{2}{x}) + f(x) \cdot \frac{2}{x} + 2 = \frac{7}{3} + xf(\frac{2}{x}) + f(x) \cdot \frac{2}{x}$

$\geq \frac{7}{3} + 2\sqrt{2f(x) \cdot f(\frac{2}{x})} = \frac{7}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7+2\sqrt{6}}{3}$ （当 $xf(\frac{2}{x}) = f(x) \cdot \frac{2}{x}$ 时，不等式取等）， (15 分)

而 $xf(\frac{2}{x}) = f(x) \cdot \frac{2}{x}$，可得 $x\frac{f(2)}{f(x)} = f(x) \cdot \frac{2}{x}$，即 $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{f(2)}{2}} = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$，

当 $x > \sqrt{2}$ 时，$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$，由(2)ii)知，$0 < f(x) < f(\sqrt{2})$，即 $\frac{f(x)}{x} < \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$，

当 $x < \sqrt{2}$ 时，$\frac{1}{x} > \frac{1}{\sqrt{2}}$，由(2)ii)知，$f(x) > f(\sqrt{2})$，即 $\frac{f(x)}{x} > \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$，

故当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时，$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$，$F(x)$ 最小值为 $\frac{7+2\sqrt{6}}{3}$. (17 分)

注：取等条件 $x = \sqrt{2}$ 给出的得 1 分，说明了原因的得 1 分，若用 $\frac{f(x)}{x}$ 的单调性分析得取等条件，应给出单调性证明才能得分.

@高考直通车试题库 海量高清试题免费下载

高考直通车 App生成