

长沙市第一中学 2025—2026 学年度高一第一学期第一次阶段性检测

数学

时量：120 分钟 满分：150 分得分

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $B \cup A =$ ()

- A. $\{1, 3, 5\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\{1, 2, 4, 5\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x - |x| \geq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x - |x| < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x - |x| \geq 0$

- C. $\exists x \in \mathbf{R}, x - |x| \geq 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x - |x| < 0$

3. 命题“ $\forall x \in [1, 2], x^2 - a \leq 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件是 ()

- A. $a \leq 4$ B. $a \geq 4$ C. $a \leq 5$ D. $a \geq 5$

4. 已知 $a = \sqrt{c+3} + \sqrt{c+4}$, $b = \sqrt{c+2} + \sqrt{c+5}$, 则 ()

- A. $a > b > 1$ B. $b > a > 1$ C. $a > 1 > b$ D. $b > 1 > a$

5. 购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱一定. 假设连续两天购买该物品，第一天物品的价格为 p_1 ，第二天物品的价格为 p_2 ，且 $p_1 \neq p_2$ ，则以下选项正确的为 ()

A. 第一种方式购买物品的单价为 $\frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}$

B. 第二种方式购买物品的单价为 $\frac{p_1 + p_2}{2}$

C. 第一种方式购买物品所用单价更低

D. 第二种方式购买物品所用单价更低

6. 下列函数中最小值为 4 的是 ()

A. $y = 4x + \frac{1}{x}$

B. 当 $x > 0$ 时, $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

C. 当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $y = 2x - 1 + \frac{1}{2x - 3}$

D. $y = \sqrt{x^2 + 5} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 5}}$



7. 已知不等式 $ax^2 - bx - 1 > 0$ 的解集是 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\right\}$, 则不等式 $x^2 - bx - a < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x \mid 2 < x < 3\}$

B. $\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$

C. $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{x \mid x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$

8. 在数学上称函数 $y = [x]$ 为高斯函数, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[1.5] = 1, [-2.3] = -3, [3] = 3$.

那么使不等式 $4[x]^2 - 12[x] + 5 \leq 0$ 成立的充分不必要条件是 ()

A. $x \in \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$

B. $x \in \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$

C. $x \in \{x \mid 1 \leq x < 3\}$

D. $x \in \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$

二、多选题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题中, 是真命题的是 ()

A. $a > 1$ 且 $b > 1$ 是 $ab > 1$ 的充分条件

B. “ $x > \frac{1}{2}$ ” 是 “ $\frac{1}{x} < 2$ ” 的充分不必要条件

C. 命题 “ $\forall x < 1, x^2 < 1$ ” 的否定是 “ $\exists x \geq 1, x^2 \geq 1$ ”

D. $a + b = 0$ 的充要条件是 $\frac{a}{b} = -1$

10. 下列命题叙述正确的是 ()

A. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a > b$ 时, 当 $m > 0$ 时, $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$

B. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a > b$ 时, 当 $m < 0$ 时, $\frac{b+m}{a+m} < \frac{b}{a}$

C. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a > b$ 时, 当 $m > 0$ 时, $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$

D. $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a > b$ 时, 当 $m > 0$ 时, $\frac{b-m}{a-m} < \frac{b}{a}$

11. 已知集合 A, B 满足:

① $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset$;

② $\forall x_1 \in A$, 若 $x_2 \in \mathbb{Q}$ 且 $x_2 < x_1$, 则 $x_2 \in A$;

③ $\forall y_1 \in B$, 若 $y_2 \in \mathbb{Q}$ 且 $y_2 > y_1$, 则 $y_2 \in B$.

则下列结论正确的是 ()

- A. 若集合 A 中有最大数, 则集合 B 中没有最小数
- B. 若集合 A 中没有最大数, 则集合 B 中可能没有最小数
- C. $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$, 使得 $x_1 > x_2$
- D. $\forall x_1 \in A, x_2 \in B$, 存在无理数 x , 使得 $x_1 < x < x_2$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 不等式 $\frac{2x-1}{x+2} \leq 1$ 的解集为 _____.
13. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2 + ax + 1 \leq 0$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.
14. 已知 $a < b$, 且关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 $T = \frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}, C = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$.

- (1) 若 $A = B$, 求实数 a 的值;
- (2) 若 $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的值.

16. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, -x^2 + 2x - a^2 > 0$ 成立; 命题 $q: \text{方程 } x^2 + ax + 2 = 0 \text{ 有两个不相等的负根}.$

- (1) 若命题 p 为真命题, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若命题 p 和命题 q 有且只有一个是真命题, 求实数 a 的取值范围.

17. (1) 若不等式 $ax^2 + (1-a)x + a - 2 \geq -2$ 对于一切实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

- (2) 解关于 x 的不等式 $ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

18. 某学校要建造一个长方体形的体育馆, 其地面面积为 240m^2 , 体育馆高 5m , 如果甲工程队报价为: 馆顶每平方米的造价为 100 元, 体育馆前后两侧墙壁平均造价为每平方米 150 元, 左右两侧墙壁平均造价为每平方米 250 元, 设体育馆前墙长为 x 米.

- (1) 当前墙的长度为多少时, 甲工程队报价最低?

- (2) 现有乙工程队也参与该校的体育馆建造竞标, 其给出的整体报价为 $12000 + 500 \left(\frac{a+1152}{x} + a \right)$ 元

- ($a > 0$), 若无论前墙的长度为多少米, 乙工程队都能竞标成功, 试求 a 的取值范围.

19. 已知有限集 X, Y , 定义两个集合的差集为 $X - Y = \{x | x \in X \text{ 且 } x \notin Y\}$, 对称差为

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$



(1) 若 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{3, 4, 5\}$, 求集合 $X \Delta Y$.

(2) 已知集合 $S = \{1, 2, \dots, 2025\}$. 对任意非空有限实数集 A, B , 设 $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, 记 $|X|$ 表示集合 X 中的元素个数.

(i) 证明: $|A - S| + |B - S| + |S - C| \geq 1$;

(ii) 求 $|A \Delta S| + |B \Delta S| + |C \Delta S|$ 的最小值.



数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	A	C	D	A	D	B	A	B	AB	BD	ABD

1. A 【解析】由 $\complement_U B = \{3, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, 所以 $\complement_U B \cup A = \{1, 3, 5\}$.

2. C 【解析】命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x - |x| \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}, x - |x| < 0$ ”.

3. D 【解析】若 $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \leq 0$, 即 $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, a \geq x^2$, 所以 $a \geq 4$,

根据选项可知, 使命题“ $\forall x \in \{x | 1 \leq x \leq 2\}, x^2 - a \leq 0$ ”为真命题的一个充分不必要条件可以是 $a \geq 5$.

4. A 【解析】因为 $c+3 \geq 0$, 所以 $c+4 \geq 1$, 所以 $a = \sqrt{c+3} + \sqrt{c+4} \geq 1$,

因为 $c+2 \geq 0$, 所以 $c+5 \geq 3$, 所以 $b = \sqrt{c+2} + \sqrt{c+5} \geq \sqrt{3} > 1$,

且 $a^2 - b^2 = 2[\sqrt{(c+3)(c+4)} - \sqrt{(c+2)(c+5)}]$,

因为 $(c+3)(c+4) - (c+2)(c+5) = c^2 + 7c + 12 - (c^2 + 7c + 10) = 2 > 0$,

所以 $(c+3)(c+4) > (c+2)(c+5)$, 所以 $a^2 - b^2 = 2[\sqrt{(c+3)(c+4)} - \sqrt{(c+2)(c+5)}] > 0$,

所以 $a^2 > b^2$, 又 $a \geq 1, b > 1$, 所以 $a > b > 1$.

5. D 【解析】第一种策略: 设每次购买这种物品的数量均为 m , 则平均价格为 $\frac{mp_1 + mp_2}{2m} = \frac{p_1 + p_2}{2}$, 故 A 不正确;

第二种策略: 设每次购买这种物品所花的钱为 n , 第一次能购得该物品的数量为 $\frac{n}{p_1}$, 第二次能购得该物品的数量为

$\frac{n}{p_2}$, 则平均价格为 $\frac{2n}{\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2}} = \frac{2}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$, B 错误;

因为 $\frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{(p_1 + p_2)^2 - 4p_1 p_2}{2(p_1 + p_2)} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{2(p_1 + p_2)} > 0$, 所以 $\frac{p_1 + p_2}{2} > \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$, C 错误, D 正确.

6. B 【解析】对于 A, $y = 4x + \frac{1}{x}$, 若 $x < 0$, 则 $y < 0$, 故 A 不符合题意;

对于 B, 因为 $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 + 4}{x + 1} = (x + 1) + \frac{4}{x + 1} \geq 2\sqrt{(x + 1) \cdot \frac{4}{x + 1}} = 4$,

当且仅当 $x + 1 = \frac{4}{x + 1}$, 即 $x = 1$ 时取等号, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $y = 2x - 1 + \frac{1}{2x - 3} = -\left[-(2x - 3) + \frac{1}{-(2x - 3)}\right] + 2 \leq -2 + 2 = 0$,

当且仅当 $-(2x - 3) = \frac{1}{-(2x - 3)}$, 即 $x = 1$ 时取等号, 所以其最大值为 0, 无最小值, 故 C 错误;

对于 D, $y = \sqrt{x^2 + 5} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 5}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 5} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2 + 5}}} = 4$, 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 5} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 5}}$ 时取等号, 但此时无解, 这表明最小值大于 4, 故 D 错误.

7. A 【解析】依题意, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 - bx - 1 = 0$ 的两个实根, 且 $a < 0$, 于是 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)$, 且 $\frac{-1}{a} = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$, 解得 $a = -6, b = 5$. 不等式 $x^2 - bx - a < 0$ 化为 $x^2 - 5x + 6 < 0$, 解得 $2 < x < 3$, 故解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$.

8. B 【解析】因为 $4[x]^2 - 12[x] + 5 \leq 0$, 则 $(2[x] - 1)(2[x] - 5) \leq 0$, 则 $\frac{1}{2} \leq [x] \leq \frac{5}{2}$, 又 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 因此不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x < 3\}$. 依题意可知, 只需求出不等式 $4[x]^2 - 12[x] + 5 \leq 0$ 解集的一个非空真子集即可, 选项中只有 $\{x | 1 \leq x \leq 2\} \subsetneq \{x | 1 \leq x < 3\}$.

9. AB 【解析】对于 A, 当 $a>1, b>1$ 时, $ab>1$, 充分性成立, A 正确;

对于 B, 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $0<\frac{1}{x}<2$, 充分性成立; 当 $\frac{1}{x}<2$ 时, $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<0$, 必要性不成立, 则“ $x>\frac{1}{2}$ ”是“ $\frac{1}{x}<2$ ”的充分不必要条件, B 正确;

对于 C, 由全称量词命题的否定知原命题的否定为: $\exists x<1, x^2\geq 1$, C 错误;

对于 D, 当 $a=0, b=0$ 时, $a+b=0$, 此时 $\frac{a}{b}$ 无意义, 充分性不成立, D 错误.

10. BD 【解析】对于 A, 因为 $\forall a, b \in \mathbf{R}_+$ 且 $a>b$, 当 $m>0$ 时, 取 $a=2, b=1, m=1$,

所以 $\frac{a+m}{b+m}=\frac{3}{2}, \frac{a}{b}=2$, 则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $\forall a, b \in \mathbf{R}_+$ 且 $a>b$, 当 $m>0$ 时, 则 $a-b>0, a+m>0$,

所以 $\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{(a-b)m}{a(a+m)}>0$, 则 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $\forall a, b \in \mathbf{R}_+$ 且 $a>b$, 当 $m<0$ 时, 取 $a=2, b=1, m=-3$,

所以 $\frac{b+m}{a+m}=2, \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, 则 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$, 故 C 错误;

对于 D, 存在 $a=3, b=1, m=1, \frac{b-m}{a-m}=0, \frac{b}{a}=\frac{1}{3}$, 满足 $\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}$, 故 D 正确.

11. ABD 【解析】由所给条件, 可知集合 A 中的元素都小于集合 B 中的元素,

对于 A, 若集合 A 中的元素有最大数, 则必然存在一个有理数 $x \in A$, 使得 $\forall x_1 \in A, x_1 \leq x$,

$\forall y_1 \in B, y_1 > x$, 因此 B 中没有最小数, 故 A 正确;

对于 B, 若集合 A 中的元素没有最大数, 则必然存在一个数 x , 使得 $\forall x_1 \in A, x_1 < x$, 且 $\forall x_2 < x$ 且 $x_2 \in \mathbf{Q}$, 有 $x_2 \in A$,

如果 x 是有理数, 则 $x \in B$, 且 $\forall y_1 \in B, y_1 \geq x$, 则 B 有最小数为 x ;

如果 x 是无理数, 则 $x \notin B$, 且 $\forall y_1 \in B, y_1 > x$, 则 B 没有最小数, 故 B 正确;

对于 C, 假设存在 $x_1 \in A, x_2 \in B$ 且 $x_1 > x_2$, 由 $\forall y_1 \in B$, 若 $y_2 \in \mathbf{Q}$ 且 $y_2 > y_1$, 则 $y_2 \in B$,

取 $y_1 = x_2 \in B, y_2 = x_1 > x_2$, 则 $x_1 \in B$, 但 $x_1 \in A$, 与 $A \cap B = \emptyset$ 矛盾.

故对任意 $x_1 \in A, x_2 \in B$, 都有 $x_1 < x_2$, 故 C 错误;

对于 D, 由 C 选项可知, $\forall x_1 \in A, x_2 \in B$, 可得 $x_1 < x_2$, 而两个不等的有理数之间必存在无理数,

所以存在无理数 x , 使得 $x_1 < x < x_2$, 故 D 正确.

三、填空题

12. $\{x|-2<x\leq 3\}$ 【解析】由不等式 $\frac{2x-1}{x+2}\leq 1$, 可得 $\frac{2x-1}{x+2}-1=\frac{x-3}{x+2}\leq 0$,

即 $(x-3)(x+2)\leq 0$ 且 $x+2\neq 0$, 解得 $-2<x\leq 3$,

即不等式 $\frac{2x-1}{x+2}\leq 1$ 的解集为 $\{x|-2<x\leq 3\}$.

13. $0\leq a<4$ 【解析】因为命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2+ax+1\leq 0$ ”是假命题, 则它的否定“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2+ax+1>0$ ”是真命题,

当 $a=0$ 时, 不等式为 $1>0$, 显然成立;

当 $a\neq 0$ 时, 应满足 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=a^2-4a<0, \end{cases}$ 解得 $0<a<4$,

综上, 实数 a 的取值范围是 $0\leq a<4$.

14. 3 【解析】由题意得, 一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geq 0$ 对一切实数 x 都成立,

当 $a=0$ 时, 不能保证恒成立, 不符合题意;

当 $a\neq 0$ 时, 则需满足 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta\leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac\leq 0, \end{cases} \because b>a>0, b-a>0, b^2\leq 4ac, \therefore c\geq \frac{b^2}{4a}$,

则 $T=\frac{a+b+c}{b-a}\geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{(2a+b)^2}{4a(b-a)}=\frac{[3a+(b-a)]^2}{4a(b-a)}\geq \frac{4(b-a)\times 3a}{4a(b-a)}=3$,

当且仅当 $3a=b-a, c=\frac{b^2}{4a}$, 即 $c=b=4a$ 时取等号.



四、解答题

15.【解析】(1)由题可得 $B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$, 2分

由于 $A=B$, 从而 2, 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的两根,

即 $\begin{cases} 2+3=a, \\ 2 \times 3=a^2-19, \end{cases}$ 解得 $a=5$ 6分

(2)因为 $B=\{2,3\}$, $C=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$ 7分

因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 又 $A \cap C = \emptyset$, 所以 $2 \in A$ 且 $3 \notin A$, 9分

即 $4-2a+a^2-19=0$, $a^2-2a-15=0$, 解得 $a=5$ 或 $a=-3$ 10分

当 $a=5$ 时, $A=\{2,3\}$, 则 $A \cap C \neq \emptyset$, 不符合题意; 11分

当 $a=-3$ 时, $A=\{-5,2\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$ 且 $A \cap C = \emptyset$, 12分

故 $a=-3$ 符合题意,

综上, 实数 a 的值为 -3 13分

16.【解析】(1)若命题 p 为真命题, 根据二次函数的性质可得, $\Delta=4-4a^2>0$, 3分

解得 $-1<a<1$,

故实数 a 的取值范围为 $-1<a<1$ 5分

(2)若命题 q 为真, 即一元二次方程 $x^2+ax+2=0$ 有两个不相等的负根, 设为 x_1, x_2 ,

则 $\begin{cases} \Delta=a^2-8>0, \\ x_1+x_2=-a<0, \text{解得 } a>2\sqrt{2}. \\ x_1x_2=2>0, \end{cases}$ 8分

若命题 p 和命题 q 有且只有一个是真命题, 则为 p 真 q 假或 p 假 q 真, 9分

当 p 真 q 假时, 有 $\begin{cases} -1<a<1, \\ a \leq 2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $-1<a<1$; 11分

当 p 假 q 真时, 有 $\begin{cases} a \leq -1 \text{ 或 } a \geq 1, \\ a > 2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $a > 2\sqrt{2}$ 13分

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a|-1<a<1 \text{ 或 } a>2\sqrt{2}\}$ 15分

17.【解析】(1)依题意, 不等式 $ax^2+(1-a)x+a \geq 0$ 对于一切实数 x 恒成立,

当 $a=0$ 时, 不等式可化为 $x \geq 0$, 不满足题意; 2分

当 $a \neq 0$ 时, 有 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a>0, \\ (1-a)^2-4a^2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{1}{3}$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a|a \geq \frac{1}{3}\}$ 6分

(2)不等式 $ax^2+(1-a)x+a-2 < a-1$ 等价于 $ax^2+(1-a)x-1 < 0$ 7分

当 $a=0$ 时, 不等式可化为 $x-1 < 0$, 所以不等式的解集为 $\{x|x < 1\}$; 8分

当 $a>0$ 时, 不等式可化为 $(ax+1)(x-1) < 0$, 此时 $-\frac{1}{a} < 1$,

所以不等式的解集为 $\{x|-\frac{1}{a} < x < 1\}$; 9分

当 $a<0$ 时, 不等式可化为 $(ax+1)(x-1) < 0$, 10分

①当 $a=-1$ 时, $-\frac{1}{a}=1$, 不等式的解集为 $\{x|x \neq 1\}$; 11分

②当 $-1<a<0$ 时, $-\frac{1}{a}>1$, 不等式的解集为 $\{x|x > -\frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\}$; 12分

③当 $a<-1$ 时, $-\frac{1}{a}<1$, 不等式的解集为 $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\}$ 13分

综上可知, 当 $a=0$ 时, 解集为 $\{x|x < 1\}$, 当 $a>0$ 时, 解集为 $\{x|-\frac{1}{a} < x < 1\}$,

当 $-1<a<0$ 时, 解集为 $\{x|x > -\frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\}$, 当 $a=-1$ 时, 解集为 $\{x|x \neq 1\}$,

当 $a<-1$ 时, 解集为 $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\}$ 15分



18.【解析】(1)因为体育馆前墙长为 x 米,地面面积为 240 平方米,

所以体育馆的左右两侧墙的长度均为 $\frac{240}{x}$ 米($x>0$), 1 分

设甲工程队报价为 y 元,

所以 $y = \frac{240}{x} \times 5 \times 250 \times 2 + 150 \times 5x \times 2 + 24000 = 500 \left(\frac{1200}{x} + 3x \right) + 24000$, 3 分

因为 $y \geq 1500 \times 2 \sqrt{\frac{400}{x} \cdot x} + 24000 = 84000$, 5 分

当且仅当 $\frac{400}{x} = x$, 即 $x = 20$ 时等号成立, 6 分

所以当前墙的长度为 20 米时,甲工程队报价最低为 84000 元. 7 分

(2)根据题意可知, $500 \left(\frac{1200}{x} + 3x \right) + 24000 > 12000 + 500 \left(\frac{a+1152}{x} + a \right)$, 8 分

即 $3x^2 + 24x + 48 > a(1+x)$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 9 分

所以 $a < \frac{3(x+4)^2}{1+x}$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 12 分

因为 $a > 0$,

$\frac{(x+4)^2}{1+x} = \frac{(x+1)^2 + 6(x+1) + 9}{1+x} = (x+1) + \frac{9}{x+1} + 6 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{9}{x+1}} + 6 = 12$, 15 分

当且仅当 $x+1 = \frac{9}{x+1}$, 即 $x = 2$ 时等号成立, 16 分

所以 $0 < a < 36$,

故当 $0 < a < 36$ 时,无论前墙的长度为多少米,乙工程队都能竞标成功. 17 分

19.【解析】(1)根据定义得 $X-Y = \{1, 2\}$, $Y-X = \{5\}$, 2 分

则 $X \Delta Y = (X-Y) \cup (Y-X) = \{1, 2, 5\}$ 3 分

(2)(i) 若 $|A-S| = |B-S| = 0$, 则 $A \subseteq S$, 且 $B \subseteq S$.

于是, $1 \notin C$, 从而, $|S-C| \geq 1$, 因此 $|A-S| + |B-S| + |S-C| \geq 1$ 成立. 5 分

否则, 若 $|A-S| \neq 0$ 或 $|B-S| \neq 0$, 则必有 $|A-S| + |B-S| \geq 1$,

综上, $|A-S| + |B-S| + |S-C| \geq 1$ 成立. 7 分

(ii) 令 $f = |A \Delta S| + |B \Delta S| + |C \Delta S|$, 首先证明 $f \geq 2026$ 8 分

依题意可知 $f = |A-S| + |B-S| + |S-C| + |S-A| + |S-B| + |C-S|$.

由(i)可知 $|A-S| + |B-S| + |S-C| \geq 1$,

只需证明 $|S-A| + |S-B| + |C-S| \geq 2025$ 9 分

若 $|S \cap A| = 0$, 则 $|S-A| = 2025$, 于是 $|S-A| + |S-B| + |C-S| \geq 2025$ 10 分

否则, 不妨设 $S \cap A$ 中的最大元素为 k , 且 $k \leq 2025$, 则必有 $|S-A| \geq 2025 - k$.

考虑元素 $x \in \{2026-k, 2027-k, \dots, 2025\}$.

若 $x \notin B$, 又 $x \in S$, 因此 $x \in S-B$;

若 $x \in B$, 则 $x \notin S-B$, 由于 $k \in A, x \in B$, 因此 $k+x \in C$,

注意到 $k+x \geq k + (2026-k) = 2026 \notin S$, 因此 $k+x \in C-S$.

因此, 对任意 $x \in \{2026-k, 2027-k, \dots, 2025\}$, $x \in S-B$ 或 $k+x \in C-S$ 中总有一个成立,

故 $|S-B| + |C-S| \geq 2025 - (2026-k) + 1 = k$.

因此 $|S-A| + |S-B| + |C-S| \geq 2025 - k + k = 2025$.

综上所述, $f = |A-S| + |B-S| + |S-C| + |S-A| + |S-B| + |C-S| \geq 2026$ 15 分

其次证明, 存在集合 A, B 使得 $f = 2026$,

取 $A=B=S$, 此时 $C = \{2, 3, \dots, 4050\}$.

于是, $|A \Delta S| = |B \Delta S| = 0, |C \Delta S| = 2026$, 此时 $f = 2026$.

综上所述, $f_{\min} = 2026$ 17 分