礼泉县2025~2026学年度第一学期期中学科素养评价质量调研

高一年级数学

注意事项：

1.本试题共4页，满分150分，时间120分钟.

2.答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上.

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.涂写在本试卷上无效.

4.作答非选择题时，将答案书写在答题卡上，书写在本试卷上无效.

5.考试结束后，监考员将答题卡按顺序收回，装袋整理；试题不回收.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,1,2\},B=\{x|\ x\in\mathbf{N}\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{-2,1,2\}$

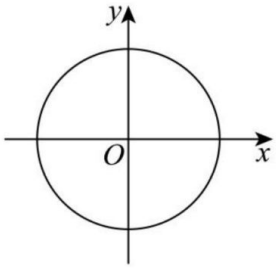
2. 下列函数中，定义域为 $\mathbf{R}$ 的是（　　）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}-2$

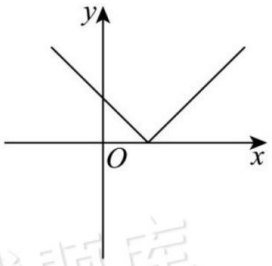
C. $f(t)=\dfrac{1}{t}$　　D. $f(t)=\sqrt{-t^2+2t}$

3. 下列各图中，可以表示以 x 为自变量的偶函数的是（　　）

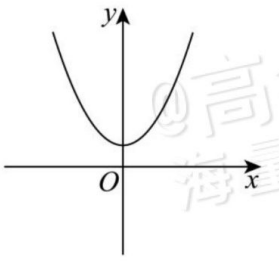
A.



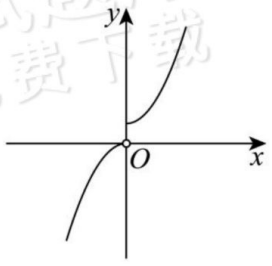
B.



C.



D.



4. “$a-b>0$”是“$a^2>b^2$”的（　　）

高考直通车
App生成

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $f\left(x+2\right)=2^{x}-1$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式是（　　）

A. $f\left(x\right)=2^{x-2}-1$　　B. $f\left(x\right)=4^{x}-1$

C. $f\left(x\right)=(x-2)^{2}-1$　　D. $f\left(x\right)=2^{x}+1$

6. 下列函数中，与函数 $f(x)=|x-1|$ 为同一函数的是（　　）

A. $h(t)=\sqrt{(t-1)^{2}}$　　B. $u(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ x-1, x>0\end{cases}$

C. $v(x)=\dfrac{x^{2}-x}{x}$　　D. $g(t)=t-1, t\ge 1$

7. 中国清朝数学家李善兰在 1859 年翻译《代数学》中首次将“function”译做“函数”，沿用至今，为什么这么翻译，书中解释说“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”，这个解释说明了函数的内涵：只要有一个法则，使得取值范围中的每一个值 x，有一个确定的 y 和它对应即可，而不管这个对应的法则是公式、图象、表格还是其它形式.函数 $f(x)$ 由下表给出，则 $f(f(4)-2)$ 的值为（　　）

x	$x\le 0$	$0<x<2$	$x\ge 2$
y	1	2	3

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，将其推广可得：函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于点 $P\left(a,b\right)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f\left(x+a\right)-b$ 为奇函数，下列函数中，图像关于点 $\left(1,1\right)$ 成中心对称图形的是（　　）

A. $f\left(x\right)=x^{3}-1$　　B. $f\left(x\right)=x^{3}+1$

C. $f\left(x\right)=(x+1)^{3}-1$　　D. $f\left(x\right)=(x-1)^{3}+1$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

高考直通车 App生成

9. 下列计算正确的是（　　）

A. $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$　　B. $\left(-a^2\right)^3=a^6$　　C. $\sqrt[8]{a^8}=a$　　D. $\sqrt[5]{-\pi^5}=-\pi$

10. 下列选项中能证明命题“$\exists x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2-2x=1$”为真命题的是（　　）

A. $x=0,y=1$　　B. $x=0,y=-1$

C. $x=-2,y=1$　　D. $x=2,y=1$

11. 已知$a>0,b>0$，则下列命题正确的是（　　）

A. 若$ab=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\sqrt{2}$

B. 函数$y=a+\frac{1}{a+1}$的最小值为 1

C. 若$a^2+b^2=4$，则ab的最大值为 2

D. 若$a^2+ab=2$，则$3a+b$的最小值是 4

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 命题“$\forall x\in\mathbf{Z},x^2-2x<0$”的否定是_____.（用存在量词表示）

13. 已知$x>0,y>0,x+y-2xy=0$，则xy的最小值为_____.

14. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}+5,x<0,\\ ax,x\geq 0,\end{cases}$且$f\left(a\right)=4$，则$a=$_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知集合$A=\left\{x|2\leq x\leq 5\right\},B=\{x|-2<x\leq 3\}$，

（1）求$A\cap B$；

（2）若全集$U=A\cup B$，求$\complement_U A$.

16. 已知二次函数$f\left(x\right)=ax^2+\left(b-2\right)x+3$.

（1）若不等式$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|-1<x<1\right\}$，求$a,b$的值；

（2）若$f\left(1\right)=2$，且$a>0,b>0$，求$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$的最小值，并写出取最小值时$a$、$b$的值.

高考直通车
App生成

17. 已知幂函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f\left(x\right)$ 的表达式，并写出其单调区间；

(2) 若 $0<f\left(a+1\right)\le f\left(4-2a\right)$，求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2+ax+4$.

(1) 若 $a=-2$，求函数 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域；

(2) 若不等式 $f\left(x\right)>2x+1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 已知 $f\left(x\right)$ 在区间 $[-2,2]$ 上单调，求 $f\left(x\right)$ 的最小值 $f(x)_{\min}$.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{3^x-a}{3^x+a}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 用定义证明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

(3) 若关于 x 的不等式 $f(mx^2+1)+f(3mx)\ge 0$ 对于任意实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围.

@高考直通车试题库 海量高清试题免费下载

高考直通车 App生成

礼泉县2025~2026学年度第一学期期中学科素养评价质量调研

高一年级数学

注意事项：

1.本试题共4页，满分150分，时间120分钟.

2.答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上.

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.涂写在本试卷上无效.

4.作答非选择题时，将答案书写在答题卡上，书写在本试卷上无效.

5.考试结束后，监考员将答题卡按顺序收回，装袋整理；试题不回收.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,1,2\},B=\{x|\ x\in\mathbf{N}\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{-2,1,2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用交集的意义求解即可.

【详解】$A\cap B=\{-2,1,2\}\cap\{x|\ x\in\mathbf{N}\}=\{1,2\}$.

故选：C.

2. 下列函数中，定义域为$\mathbf{R}$的是（　　）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}-2$

C. $f(t)=\dfrac{1}{t}$　　D. $f(t)=\sqrt{-t^2+2t}$

【答案】B

【解析】

【分析】逐项分析各函数的定义域即可.

【详解】A：$f(x)=\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$，不符合；

B：$f(x)=\sqrt{x^2}-2$的定义域为$\mathbf{R}$，符合；

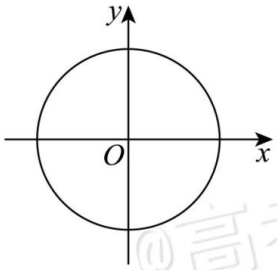
C：$f(t)=\dfrac{1}{t}$的定义域为$\{t|t\neq0\}$，不符合；

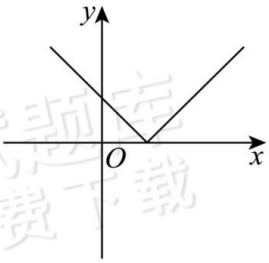
高考直通车
App生成

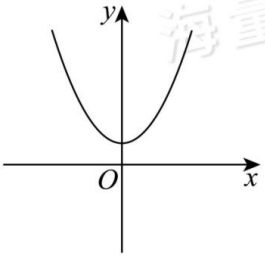
D：由 $-t^2+2t\geq 0$ 解得 $0\leq t\leq 2$，所以 $f\left(t\right)=\sqrt{-t^2+2t}$ 的定义域为 $\left[0,2\right]$，不符合；

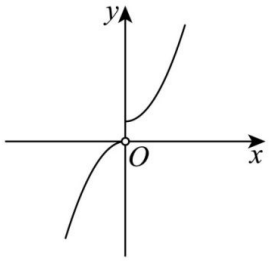
故选：B.

3. 下列各图中，可以表示以 x 为自变量的偶函数的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用函数及偶函数图象的性质判断图象即可.

【详解】A 选项的图象不是函数图象,故排除,

而偶函数的图像关于 y 轴对称,所以排除 B，D 选项,

故选:C.

4. “$a-b>0$”是“$a^2>b^2$”的（　　）

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】根据给定条件，利用充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】不等式 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$，取 $a=2,b=-2$，满足 $a>b$，而 $a^2=4=b^2$，

反之，$(-2)^2>1^2$，而 $a=-2<1=b$，

所以“$a-b>0$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件.

故选：D

高考直通车
App生成

5. 已知 $f(x+2)=2^x-1$，则 $f(x)$ 的解析式是（　　）

A. $f(x)=2^{x-2}-1$　　B. $f(x)=4^x-1$

C. $f(x)=(x-2)^2-1$　　D. $f(x)=2^x+1$

【答案】A

【解析】

【分析】采用换元法求解出 $f(x)$ 的解析式.

【详解】令 $x+2=t$，则 $x=t-2$，所以 $f(t)=2^{t-2}-1$，

所以 $f(x)=2^{x-2}-1$，

故选：A.

6. 下列函数中，与函数 $f(x)=|x-1|$ 为同一函数的是（　　）

A. $h(t)=\sqrt{(t-1)^2}$　　B. $u(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ x-1, x>0\end{cases}$

C. $v(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$　　D. $g(t)=t-1, t\ge 1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，利用相同函数的定义逐项判断得解.

【详解】函数 $f(x)=|x-1|$ 定义域为 R，值域为 $[0,+\infty)$，

对于 A，函数 $h(t)=\sqrt{(t-1)^2}$ 的定义域为 R，且 $\sqrt{(t-1)^2}=|t-1|$，与 $f(x)$ 的对应法则相同，A 是；

对于 B，函数 $u(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ x-1, x>0\end{cases}$ 的定义域为 R，值域为 $(-1,+\infty)$，与 $f(x)$ 的值域不同，B 不是；

对于 C，函数 $v(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，与 $f(x)$ 的定义域不同，C 不是；

对于 D，函数 $g(t)=t-1, t\ge 1$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，与 $f(x)$ 的定义域不同，D 不是.

故选：A

7. 中国清朝数学家李善兰在 1859 年翻译《代数学》中首次将“function”译做“函数”，沿用至今，为什么这么翻译，书中解释说“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”，这个解释说明了函数的内涵：只要有一个法

高考直通车 App生成

则，使得取值范围中的每一个值x，有一个确定的y和它对应即可，而不管这个对应的法则是公式、图象、表格还是其它形式.函数$f(x)$由下表给出，则$f(f(4)-2)$的值为（　　）

x	$x\le 0$	$0<x<2$	$x\ge 2$
y	1	2	3

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用表格中对应的数据依次判断计算得解.

【详解】依题意，$f(4)=3$，所以$f(f(4)-2)=f(1)=2$.

故选：B

8. 已知函数$y=f(x)$的图像关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数$y=f(x)$为奇函数，将其推广可得：函数$y=f(x)$的图像关于点$P(a,b)$成中心对称图形的充要条件是函数$y=f(x+a)-b$为奇函数，下列函数中，图像关于点$(1,1)$成中心对称图形的是（　　）

A. $f(x)=x^3-1$　　B. $f(x)=x^3+1$

C. $f(x)=(x+1)^3-1$　　D. $f(x)=(x-1)^3+1$

【答案】D

【解析】

【分析】利用函数关于点对称的充要条件逐项判断即可.

【详解】因为$f(x)=x^3-1$，所以$f(x)+1=x^3$，又$g(x)=x^3$为奇函数，

所以$f(x)=x^3-1$关于$(0,-1)$对称，故A错误；

因为$f(x)=x^3+1$，所以$f(x)-1=x^3$，又$g(x)=x^3$为奇函数，

所以$f(x)=x^3+1$关于$(0,1)$对称，故B错误；

因为$f(x)=(x+1)^3-1$，所以$f(x-1)+1=(x-1+1)^3-1+1=x^3$，

又$g(x)=x^3$为奇函数，所以$f(x)=(x+1)^3-1$关于$(-1,-1)$对称，故C错误；

高考直通车 App生成

因为 $f(x)=(x-1)^3+1$，所以 $f(x+1)-1=(x+1-1)^3+1-1=x^3$，

又 $g(x)=x^3$ 为奇函数，所以 $f(x)=(x-1)^3+1$ 关于 $(1,1)$ 对称，故 D 正确.

故选：D.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 下列计算正确的是（　　）

A. $8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$　　B. $\left(-a^2\right)^3=a^6$　　C. $\sqrt[8]{a^8}=a$　　D. $\sqrt[5]{-\pi^5}=-\pi$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据幂指运算，可得答案.

【详解】对于 A，$8^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，故 A 正确；

对于 B，$\left(-a^2\right)^3=-a^{2\times3}=-a^6$，故 B 错误；

对于 C，$\sqrt[8]{a^8}=|a|$，故 C 错误；

对于 D，$\sqrt[5]{-\pi^5}=-\sqrt[5]{\pi^5}=-\pi$，故 D 正确.

故选：AD.

10. 下列选项中能证明命题“$\exists x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2-2x=1$”为真命题的是（　　）

A. $x=0,y=1$　　B. $x=0,y=-1$

C. $x=-2,y=1$　　D. $x=2,y=1$

【答案】ABD

【解析】

【分析】代入检验可得结果.

【详解】A：当 $x=0,y=1$ 时，$x^2+y^2-2x=1$，为真命题；

B：当 $x=0,y=-1$ 时，$x^2+y^2-2x=1$，为真命题；

C：当 $x=-2,y=1$ 时，$x^2+y^2-2x=9\neq1$，为假命题；

高考直通车 App生成

D：当$x=2,y=1$时，$x^2+y^2-2x=1$，为真命题；

故选：ABD.

11. 已知$a>0,b>0$，则下列命题正确的是（　　）

A. 若$ab=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\sqrt{2}$

B. 函数$y=a+\frac{1}{a+1}$的最小值为 1

C. 若$a^2+b^2=4$，则ab的最大值为 2

D. 若$a^2+ab=2$，则$3a+b$的最小值是 4

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用基本不等式逐项计算可判断每个选项的正确性.

【详解】对于 A，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{1}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，即$a=b=\sqrt{2}$时取等号，故 A 正确；

对于 B，$y=a+\frac{1}{a+1}=a+1+\frac{1}{a+1}-1\geq 2\sqrt{(a+1)\times\frac{1}{a+1}}-1=1$，

当且仅当$a+1=\frac{1}{a+1}$，即$a=0$时取等号，又$a>0$，所以等号取不到，

所以函数$y=a+\frac{1}{a+1}$的最小值不为 1，故 B 错误；

对于 C，$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{4}{2}=2$，当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号，

所以ab的最大值为 2，故 C 正确；

对于 D，由$a^2+ab=2$，得$a(a+b)=2$，

所以$3a+b=2a+(a+b)\geq 2\sqrt{2a(a+b)}=2\sqrt{2\times 2}=4$，

当且仅当$2a=a+b$，即$a=b=1$时取等号，所以$3a+b$的最小值是 4，故 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 命题“$\forall x\in\mathbf{Z},x^2-2x<0$”的否定是_____.（用存在量词表示）

高考直通车
App生成

【答案】$\exists x\in\mathbf{Z},x^2-2x\geq 0$

【解析】

【分析】利用全称量词命题的否定为存在量词命题写出结论.

【详解】命题“$\forall x\in\mathbf{Z},x^2-2x<0$”是全称量词命题，其否定是存在量词命题，

所以所求否定是：$\exists x\in\mathbf{Z},x^2-2x\geq 0$.

故答案为：$\exists x\in\mathbf{Z},x^2-2x\geq 0$

13. 已知$x>0,y>0,x+y-2xy=0$，则xy的最小值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】利用基本不等式可得$2\sqrt{xy}-2xy\leq 0$，结合已知求解可得xy的最小值.

【详解】因为$x>0,y>0,x+y\geq 2\sqrt{xy}$，所以$2\sqrt{xy}-2xy\leq 0$，所以$\sqrt{xy}-\left(\sqrt{xy}\right)^2\leq 0$，

所以$\left(\sqrt{xy}\right)^2-\sqrt{xy}\geq 0$，解得$\sqrt{xy}\geq 1$或$\sqrt{xy}\leq 0$（舍去），所以$xy\geq 1$，

当且仅当$x=y=1$时取等号，故xy的最小值为1.

故答案为：1.

14. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}+5,x<0,\\ ax,x\geq 0,\end{cases}$且$f\left(a\right)=4$，则$a=$_____.

【答案】2或-1

【解析】

【分析】已知函数$f\left(x\right)$为分段函数，根据函数性质结合$f\left(a\right)=4$，分$a\geq 0$和$a<0$两种情况讨论得出对应的a值，并验证是否符合题意.

【详解】当$a\geq 0$时，$f\left(a\right)=a^2=4$，解得$a=\pm 2$，

因为$a\geq 0$，故$a=2$.

当$a<0$时，$f\left(a\right)=-\dfrac{1}{a^2}+5=4$，解得$a=\pm 1$，

因为$a<0$，故$a=-1$.

验证：当$a=2$时，$f\left(2\right)=2^2=4$，符合题意；

高考直通车
App生成

当 $a=-1$ 时，$f(-1)=-\dfrac{1}{(-1)^2}+5=4$，符合题意.

故答案为：2 或 -1.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知集合 $A=\{x|2\le x\le 5\}, B=\{x|-2<x\le 3\}$，

(1) 求 $A\cap B$；

(2) 若全集 $U=A\cup B$，求 $\complement_U A$.

【答案】(1) $A\cap B=\{x|2\le x\le 3\}$

(2) $\complement_U A=\{x|-2<x<2\}$

【解析】

【分析】(1) 利用交集的定义运算即可.

(2) 根据补集及并集的定义运算即可.

【小问 1 详解】

因为 $A=\{x|2\le x\le 5\}$，$B=\{x|-2<x\le 3\}$，所以 $A\cap B=\{x|2\le x\le 3\}$.

【小问 2 详解】

因为 $U=A\cup B$，所以 $U=A\cup B=\{x|-2<x\le 5\}$，

所以 $\complement_U A=\{x|-2<x<2\}$.

16. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+(b-2)x+3$.

(1) 若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$，求 a,b 的值；

(2) 若 $f(1)=2$，且 $a>0,b>0$，求 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)$ 的最小值，并写出取最小值时 a、b 的值.

【答案】(1) $a=-3,b=2$

(2) 最小值为 9，$a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次不等式解集与方程根的关系，结合韦达定理求解出 a,b 的值；

(2) 根据条件确定出 a,b 的关系，再通过“1”的代换求解出最小值，并根据取等号的条件求解出此时 a,b 的

高考直通车
App生成

值.

【小问 1 详解】

因为 $ax^2+(b-2)x+3>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$，

由条件可知 $\begin{cases}a\neq 0\\ -\dfrac{b-2}{a}=-1+1\\ \dfrac{3}{a}=-1\times 1\end{cases}$，解得 $a=-3,b=2$；

【小问 2 详解】

因为 $f(1)=2$，所以 $a+b-2+3=2$，所以 $a+b=1$，

因为 $a>0,b>0$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=5+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 5+2\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=9$，

当且仅当 $b=2a$，即 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$ 时取等号，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为 9，此时 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$.

17. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式，并写出其单调区间；

(2) 若 $0<f(a+1)\leq f(4-2a)$，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，无单调递增区间

(2) $[1,2)$

【解析】

【分析】(1) 设出幂函数解析式，代入坐标可求解析式，再写出单调区间即可；

(2) 先判断出自变量范围，再结合单调性列出不等式组，由此可求结果.

【小问 1 详解】

设 $f(x)=x^{\alpha}$，代入 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $2^{\alpha}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\alpha=-1$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，无单调递增区间；

【小问 2 详解】

高考直通车
App生成

由 $f(x)>0$ 可知 $x>0$，又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $0<f(a+1)\le f(4-2a)\Leftrightarrow\begin{cases}a+1>0\\4-2a>0\\a+1\ge 4-2a\end{cases}$，解得 $1\le a<2$，

所以实数 a 的取值范围是 $[1,2)$.

18. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+4$.

(1) 若 $a=-2$，求函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域；

(2) 若不等式 $f(x)>2x+1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 已知 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上单调，求 $f(x)$ 的最小值 $f(x)_{\min}$.

【答案】(1) $[3,12]$

(2) $\left(2-2\sqrt{3},2+2\sqrt{3}\right)$

(3) $f(x)_{\min}=\begin{cases}8-2a,a\ge 4\\8+2a,a\le -4\end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 根据对称轴确定出单调性，则最值可求，值域可确定；

(2) 将问题转化为“$x^2+(a-2)x+3>0$ 恒成立”，利用 $\Delta<0$ 求解出结果；

(3) 根据对称轴与区间端点的关系分类讨论，利用单调性求解出最小值，由此可得 $f(x)_{\min}$ 的表示.

【小问 1 详解】

当 $a=-2$ 时，$f(x)=x^2-2x+4$，对称轴 $x=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,1)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=3$，

又因为 $f(-2)=12,f(2)=4$，所以 $f(x)_{\max}=12$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $[3,12]$；

【小问 2 详解】

因为 $f(x)>2x+1$ 恒成立，所以 $x^2+(a-2)x+3>0$ 恒成立，

所以 $\Delta=(a-2)^2-12<0$，解得 $2-2\sqrt{3}<a<2+2\sqrt{3}$，

高考直通车
App生成

所以a的取值范围为$\left(2-2\sqrt{3},2+2\sqrt{3}\right)$；

【小问 3 详解】

$f\left(x\right)=x^2+ax+4$的对称轴$x=-\dfrac{a}{2}$，

因为$f\left(x\right)$在区间$[-2,2]$上单调，所以$-\dfrac{a}{2}\le -2$或$-\dfrac{a}{2}\ge 2$，

当$-\dfrac{a}{2}\le -2$，即$a\ge 4$时，$f\left(x\right)$在$[-2,2]$上单调递增，所以$f\left(x\right)_{\min}=f\left(-2\right)=8-2a$，

当$-\dfrac{a}{2}\ge 2$，即$a\le -4$时，$f\left(x\right)$在$[-2,2]$上单调递减，所以$f\left(x\right)_{\min}=f\left(2\right)=8+2a$，

所以$f\left(x\right)_{\min}=\begin{cases}8-2a,a\ge 4\\8+2a,a\le -4\end{cases}$.

19. 已知函数$f(x)=\dfrac{3^x-a}{3^x+a}$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数.

（1）求实数a的值；

（2）用定义证明函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数；

（3）若关于x的不等式$f(mx^2+1)+f(3mx)\ge 0$对于任意实数x恒成立，求实数m的取值范围.

【答案】（1）$a=1$；

（2）证明见解析；　　（3）$0\le m\le \dfrac{4}{9}$.

【解析】

【分析】（1）利用奇函数性质求出a，再利用定义验证即得.

（2）利用增函数的定义，结合指数函数单调性及不等式性质推理得证.

（3）利用奇函数及增函数的性质等价变形不等式，再利用一元二次不等式恒成立求解.

【小问 1 详解】

由函数$f(x)=\dfrac{3^x-a}{3^x+a}$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，得$f(0)=\dfrac{1-a}{1+a}=0$，解得$a=1$，

此时$f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}$，$f(-x)=\dfrac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=\dfrac{1-3^x}{1+3^x}=-f(x)$，函数$f(x)$是奇函数，

所以$a=1$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=\dfrac{3^x+1-2}{3^x+1}=1-\dfrac{2}{3^x+1}$，

高考直通车
App生成

任意 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}, x_1 < x_2$，由函数 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，得 $0 < 3^{x_1} < 3^{x_2}$，

则 $1 < 3^{x_1} + 1 < 3^{x_2} + 1$，$\dfrac{2}{3^{x_1}+1} > \dfrac{2}{3^{x_2}+1}$，于是 $1 - \dfrac{2}{3^{x_1}+1} < 1 - \dfrac{2}{3^{x_2}+1}$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

【小问 3 详解】

对任意实数 x，不等式 $f(mx^2+1) + f(3mx) \geq 0 \Leftrightarrow f(mx^2+1) \geq -f(3mx) = f(-3mx)$ 恒成立，

即对任意实数 x，$mx^2 + 1 \geq -3mx \Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 1 \geq 0$ 恒成立，

当 $m = 0$ 时，$1 \geq 0$ 恒成立，则 $m = 0$；

当 $m \neq 0$ 时，$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = 9m^2 - 4m \leq 0 \end{cases}$，解得 $0 < m \leq \dfrac{4}{9}$，

所以实数 m 的取值范围是 $0 \leq m \leq \dfrac{4}{9}$.

@高考直通车试题库
海量高清试题免费下载

高考直通车
App生成