

洛阳市 2025——2026 学年第一学期期中考试

高一数学试卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名,准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3}{x-1} \in \mathbb{Z}\}$, 则用列举法表示 $A =$
 A. $\{-2, 0, 1, 2, 4\}$ B. $\{-2, 0, 2, 4\}$ C. $\{0, 2, 4\}$ D. $\{2, 4\}$
2. 若 $a > b, c > d$, 则
 A. $ac^2 > bc^2$ B. $a - c > b - d$ C. $a - d > b - c$ D. $ac > bd$
3. 函数 $f(x) = x^0 + \sqrt{(x+4)(1-x)}$ 的定义域是
 A. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ B. $(-4, 0] \cup (0, 1)$
 C. $[-4, 0) \cup (0, 1]$ D. $[-4, 0) \cup (0, 1)$
4. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 4x + a, x \in [0, 1]$, 若 $f(x)$ 有最小值 -2 , 则 $f(x)$ 的最大值为
 A. -2 B. 2 C. -1 D. 1
5. 下列大小关系正确的是
 ① $(\frac{2}{5})^{\frac{1}{2}} > (\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}}$ ② $(\frac{2}{5})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ ③ $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} > (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ④ $(\frac{2}{5})^{-\frac{1}{3}} > (\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}}$
 A. ①② B. ③④ C. ②③ D. ①③
6. 已知关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 3\}$, 则不等式 $\frac{ax+b}{cx+a} > 0$ 的解集为
 A. $\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 4\}$ B. $\{x \mid -4 < x < -\frac{1}{3}\}$
 C. $\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 4\}$ D. $\{x \mid x < -4 \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$

7. 设实数 x, y 满足 $x + y = 1$, 则 $\frac{4}{x} + \frac{x}{y}$ 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$ B. $[8, +\infty)$
C. $(-\infty, 0]$ D. $[0, 8]$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} < 0$,

且 $f(3) = 6$, $f(a^2 + 2a) > 2a^2 + 4a$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
C. $(-3, 1)$ D. $(-3, -2) \cup (0, 1)$

二、多选题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对得 6 分, 选对但选不全的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 设 A, B, U 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq U$, 则下列各式中正确的是

- A. $(\complement_U A) \cup B = U$ B. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U B$
C. $A \cap (\complement_U B) = \emptyset$ D. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = U$

10. 对于实数 a, b, c , 正确的命题是

- A. 若 $a > b$, 则 $a > \frac{a+b}{2} > b$ B. 若 $a > b > 0$, 则 $a > \sqrt{ab} > b$
C. 若 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 则 $a > 0, b < 0$ D. 若 $a > b > 0, c > 0$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{ax - a + 1}{x + 2}$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$
B. 当函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2, 3)$ 成中心对称时, $a = \frac{3}{2}$
C. 当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减
D. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$ 关于 $(-2, 2)$ 中心对称, 若 $a = 2$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象共有 2026 个交点, 记为 $A_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 2026)$, 则 $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_{2026} + y_{2026})$ 的值为 0



三、填空题:本大题共3小题,每小题5分,共15分。

12. 若关于 x 的一元二次不等式 $ax^2 - 3x + a < 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq m\}$, 则 $m + a =$ _____.

13. 设函数 $f(x) = \frac{2026(x+1)^2 + x^{2025}}{x^2 + 1} (-3 \leq x \leq 3)$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = 2^x$ 且 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数, 若不等式 $3ag(x) + h(2x) \geq 0$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题:本大题共6小题,共77分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

15. (12分)

(1) 求值: $(-64)^{\frac{1}{3}} + [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} - (\sqrt{2} - 1)^0 + \sqrt{(-\frac{1}{8})^2}$;

(2) 已知 $a^x = \sqrt{2} + 1$, 求 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$ 的值.

16. (13分)

已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2a = 0$.

(1) 若 $\neg p$ 为真命题, 求实数 a 的取值所构成的集合 A ;

(2) 设不等式 $|\frac{x}{3} - 1| < b$ 的解集为 B , 在(1)的条件下, 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 求实数 b 的取值范围.

17. (13分)

某公司准备搭建一间临时展房, 用来开产品展览会, 展房高为3米, 背面靠墙, 其余三面使用一种新型板材围成, 板材厚度忽略不计. 设展房正面长为 a 米, 侧面长为 b 米.

(1) 若 a, b 满足 $a + b - ab + 3 = 0$, 则展房占地面积至少为多少平方米?

(2) 若已知展房占地面积为192平方米, 正面每平方米造价1200元, 侧面每平方米造价800元, 屋顶造价5800元, 怎样设计能使总造价最低? 最低是多少?



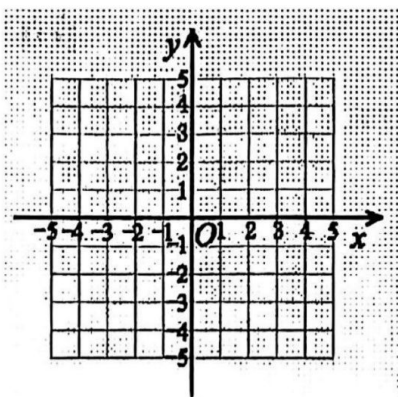
18. (13 分)

已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 1$, 且 $f(x+1) = f(x) + 2x - 3$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 画出函数 $f(|x|)$ 的图象;

(3) 若 $f(|x|) = a^2 - a - 1$ 有四个不同的实数根, 求实数 a 的取值范围.



19. (13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{m \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ 为奇函数.

(1) 求 m ;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性并证明;

(3) 若 $\exists x \in [a, a+1]$ 使 $f(x^2) < f(1-ax)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (13 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1) \neq 0$, $f(x)f(y) - f(x+y) = xy$, 且 $f(x)$ 仅有一个零点.

(1) 求 $f(0)$, $f(1)$;

(2) 当实数 m 为何值时? $f(x+m)$ 为奇函数;

(3) 设函数 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 若存在实数 $a, b (1 < a < b)$, 使得 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[ka, kb]$, 求实数 k 的取值范围.



洛阳市 2025——2026 学年第一学期期中考试

高一数学试卷参考答案

一、选择题

1 - 5 BCCDC 6 - 8 CAB 9 ABC 10 ABD 11 ACD

二、填空题

12. $-\frac{5}{2}$ 13. 4052 14. $[-\frac{17}{18}, +\infty)$.

三、解答题

15. (12 分)

$$\text{解: } (1) (-64)^{\frac{1}{3}} + [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} - (\sqrt{2} - 1)^0 + \sqrt{(-\frac{1}{8})^2}$$

$$= -4 + 3 - 1 + \frac{1}{8}$$

.....4 分

$$= -\frac{15}{8}.$$

.....6 分

$$(2) \frac{a^x + a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}}$$

$$= \frac{a^x + a^{-x}}{(a^x + a^{-x}) \cdot (a^{2x} - 1 + a^{-2x})}$$

.....8 分

$$= \frac{1}{a^{2x} - 1 + a^{-2x}}$$

$$= \frac{1}{(a^x + a^{-x})^2 - 3}$$

.....10 分

$$\therefore a^x = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore a^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

.....11 分

$$\therefore \frac{1}{(a^x + a^{-x})^2 - 3}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)^2 - 3}$$

$$= \frac{1}{5}$$

.....12 分



16. (13 分)

解:(1) 由题意知 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2a \neq 0$ 为真命题,2 分

$\therefore \Delta = 4 - 8a < 0$,4 分

$\therefore A = \{a \mid a > \frac{1}{2}\}$5 分

(2) $\because \left| \frac{x}{3} - 1 \right| < b \Leftrightarrow -b < \frac{x}{3} - 1 < b$,

$\therefore 3 - 3b < x < 3 + 3b$,

即 $B = \{x \mid 3 - 3b < x < 3 + 3b\}$7 分

$\because "x \in A"$ 是 $"x \in B"$ 的必要条件,

$\therefore B \subseteq A$8 分

当 $B = \emptyset$ 时, $3 - 3b \geq 3 + 3b$,

$\therefore b \leq 0$10 分

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 3 - 3b < 3 + 3b, \\ 3 - 3b \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \therefore 0 < b \leq \frac{5}{6}$12 分

综上所述, 实数 b 的取值范围为 $\{b \mid b \leq \frac{5}{6}\}$13 分

17. (13 分)

解:(1) $\because a + b = ab - 3$, 且 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$,

$\therefore ab - 3 \geq 2\sqrt{ab}$,2 分

即 $ab - 2\sqrt{ab} - 3 \geq 0$,

解得 $\sqrt{ab} \geq 3$ 或 $\sqrt{ab} \leq -1$ (舍),4 分

$\therefore ab \geq 9$, 当且仅当 $a = b = 3$ 时, 等号成立.5 分

所以当正面和侧面长均为 3 米时, 展房占地面积最少为 9 平方米.6 分

(2) 由题知 $ab = 192$,

总造价为 $y = a \times 3 \times 1200 + 2b \times 3 \times 800 + 5800$ 8 分

$$= 3600a + 4800b + 5800$$

$$= 1200(3a + 4b) + 5800$$

$$\geq 1200 \times 2\sqrt{12ab} + 5800$$

$$= 1200 \times 2\sqrt{12 \times 192} + 5800$$

$$= 121000.$$



当 $\begin{cases} 3a = 4b, \\ ab = 192. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = 16, \\ b = 12. \end{cases}$ 时, 上式等号成立,12 分

所以当展房正面长为 16 米, 侧面长为 12 米时, 总造价最低为 121000 元.13 分

18. (13 分)

解: (1) 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

$\therefore f(0) = 1,$

$\therefore c = 1,$ 1 分

$\therefore f(x+1) = f(x) + 2x - 3,$

$\therefore a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 = ax^2 + bx + 1 + 2x - 3,$ 2 分

$\therefore 2ax + a + b = 2x - 3,$

$\therefore \begin{cases} 2a = 2, \\ a + b = -3. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a = 1, \\ b = -4. \end{cases}$ 3 分

$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 1.$ 4 分

(2) $f(|x|) = x^2 - 4|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 4x + 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 1, & x < 0. \end{cases}$ 6 分

(3) 由图可知 $-3 < a^2 - a - 1 < 1,$ 11 分

即 $\begin{cases} a^2 - a - 2 < 0, \\ a^2 - a + 2 > 0. \end{cases}$ 12 分

$\therefore -1 < a < 2,$

$\therefore a \in (-1, 2).$ 13 分

19. (13 分)

解: (1) 因为函数 $f(x) = \frac{m \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ 为奇函数, 且定义域为 $\mathbf{R}$,

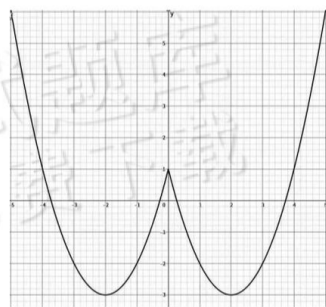
$\therefore f(0) = \frac{m-1}{2} = 0,$

$\therefore m = 1,$

当 $m = 1$ 时, $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 满足 $f(-x) = -f(x)$, 故 $m = 1.$ 2 分

(2) 由(1) 知 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$, 经判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.3 分

证明: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 > x_2$,



$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_2} + 1) \cdot (2^{x_1} + 1)}, \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\therefore 2^{x_1} > 2^{x_2}$,

又 $2^{x_1} > 0, 2^{x_2} > 0$, $\therefore 2^{x_1} + 1 > 0, 2^{x_2} + 1 > 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 由(2)知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\therefore x^2 < 1 - ax$, 即 $x^2 + ax - 1 < 0$,

设 $h(x) = x^2 + ax - 1$, 则由题意知 $x \in [a, a+1]$ 时, $h(x)_{\min} < 0$.

当 $-\frac{a}{2} \leq a$, 即 $a \geq 0$ 时, $h(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(a) = 2a^2 - 1$,

由 $2a^2 - 1 < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore 0 \leq a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $a < -\frac{a}{2} < a+1$, 即 $-\frac{2}{3} < a < 0$ 时,

$h(x)$ 在 $[a, -\frac{a}{2}]$ 上单调递减, 在 $[-\frac{a}{2}, a+1]$ 上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(-\frac{a}{2}) = -1 - \frac{a^2}{4}$,

由 $-1 - \frac{a^2}{4} < 0$ 得 $a \in \mathbf{R}$,

$\therefore -\frac{2}{3} < a < 0$.

当 $-\frac{a}{2} \geq a+1$, 即 $a \leq -\frac{2}{3}$ 时, $h(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上单调递减,

$\therefore h(x)_{\min} = h(a+1) = 2a^2 + 3a$,

由 $2a^2 + 3a < 0$ 得 $-\frac{3}{2} < a < 0$,

$\therefore -\frac{3}{2} < a \leq -\frac{2}{3}$.

综上 a 的取值范围为 $-\frac{3}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. (13 分)

解:(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)f(y) - f(x+y) = xy$.

$\therefore$ 令 $x = -1, y = 0$, 得 $f(-1)f(0) - f(-1) = 0$, 即 $f(-1)[f(0) - 1] = 0$,

$\therefore f(-1) \neq 0$,

$\therefore f(0) = 1$2 分

令 $x = 1, y = -1$, 得 $f(1)f(-1) - f(0) = -1$, $\therefore f(1)f(-1) = 0$,

$\therefore f(1) = 0$4 分

(2) 若 $f(x+m)$ 是奇函数, 则 $f(0+m) = f(m) = 0$,5 分

因为 $f(x)$ 仅有一个零点, 且由(1) 知 $f(1) = 0$, 所以 $m = 1$6 分

当 $m = 1$ 时, 因为 $f(x+1) = f(x)f(1) - x = -x$, $f(-x+1) = f(-x)f(1) + x = x$,
.....7 分

所以 $f(x+1) = -f(-x+1)$, 即 $f(x+1)$ 是奇函数.

综上, $m = 1$8 分

(3) 由(2) 知 $f(x+1) = -x$, 所以 $f(x) = 1 - x$, 所以 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}$,9 分

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均单调递增.

若存在实数 $a, b (1 < a < b)$, 使得 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[ka, kb]$,

则 $k > 0$, 且 $\begin{cases} 1 - \frac{1}{a} = ka, \\ 1 - \frac{1}{b} = kb. \end{cases} \Rightarrow a, b$ 是方程 $kx^2 - x + 1 = 0$ 的两个实根,10 分

所以方程 $kx^2 - x + 1 = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实根.11 分

设 $h(x) = kx^2 - x + 1$, 则 $\begin{cases} \Delta = 1 - 4k > 0, \\ h(1) = k > 0, \\ \frac{1}{2k} > 1. \end{cases}$ 解得 $0 < k < \frac{1}{4}$,12 分

故实数 k 的取值范围是 $(0, \frac{1}{4})$13 分